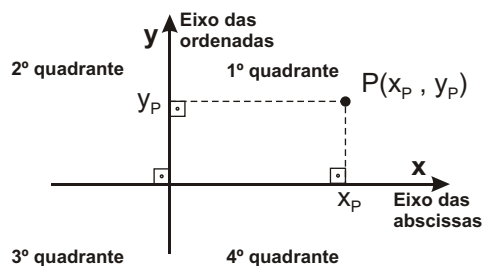


#### I - Localização de pontos no Plano Cartesiano.



O sistema cartesiano plano é constituído por dois eixos orientados, perpendiculares entre si e permite a localização de qualquer ponto em um plano através de dois valores,  $x$  e  $y$ , chamados coordenadas do ponto

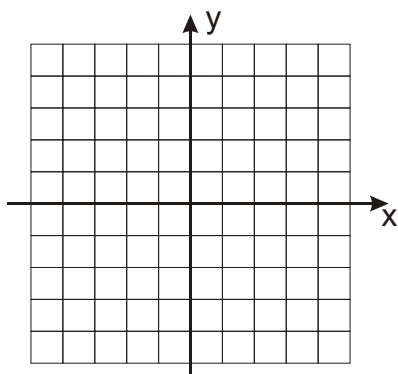
$x_P$  - abscissa do ponto P.

$y_P$  - ordenada do ponto P.

$(x_P, y_P)$  - coordenadas do ponto P.

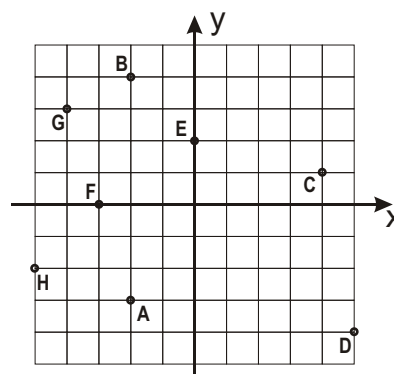
#### Exercícios

01) Dadas as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H, localizar esses pontos no sistema cartesiano plano abaixo.



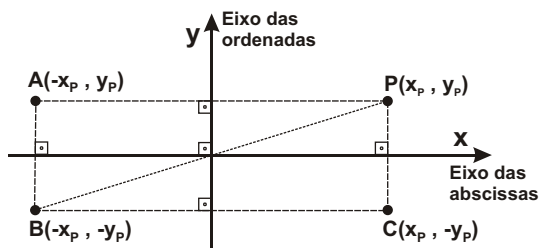
- A(-3, 5)
- B(0, 2)
- C(4, -4)
- D(-4, 0)
- E(3, -5)
- F(1, 1)
- G(-2, -5)
- H(0, 0)

02) Dados os pontos A, B, C, D, E, F, G e H no sistema cartesiano plano, dar as coordenadas de cada ponto.



- A( , )
- B( , )
- C( , )
- D( , )
- E( , )
- F( , )
- G( , )
- H( , )

#### II - Simetria de pontos no Plano Cartesiano.



P - ponto qualquer.

A - simétrico de P em relação ao eixo das ordenadas.

B - simétrico de P em relação à origem do sistema cartesiano.

C - simétrico de P em relação ao eixo das abscissas.

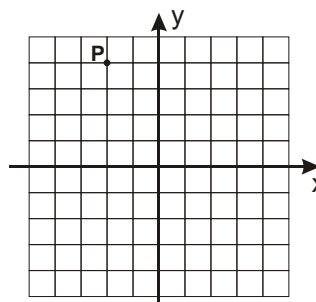
#### Dicas

- 1) Perguntar sempre "Simétrico em relação a que?"
- 2) Fazer um pequeno desenho para estudar simetria.

#### Exercícios

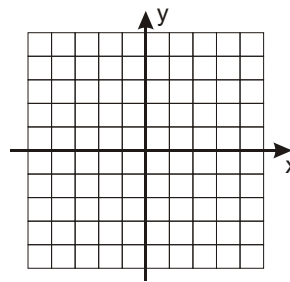
03) No plano cartesiano ao lado, desenhar e determinar as coordenadas dos pontos P, A, B, C e D, definidos abaixo.

- a) P.
- b) A, simétrico de P em relação ao eixo das ordenadas.
- c) B, simétrico de P em relação ao eixo das abscissas.
- d) C, simétrico de P em relação à origem do plano cartesiano.
- e) D, simétrico de P em relação ao ponto Q(0, 1).



- P( , )
- A( , )
- B( , )
- C( , )
- D( , )

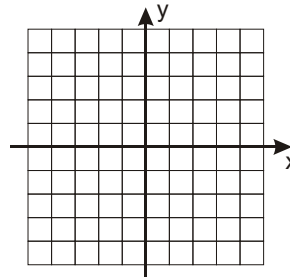
04) Sabendo-se que o ponto  $A(4, 1)$  é o simétrico do ponto  $B$  em relação ao eixo das ordenadas e que o ponto  $C$  é o simétrico de  $B$  em relação ao eixo das abscissas, determinar e desenhar no sistema cartesiano ao lado os pontos  $B$  e  $C$ .



$B( \quad , \quad )$

$C( \quad , \quad )$

05) Sabendo-se que o ponto  $B(m, -2)$  é o simétrico de  $A$  em relação ao eixo  $x$  e que  $C(3, n)$  é o simétrico de  $A$  em relação ao eixo das ordenadas, determinar as coordenadas do ponto  $A$  e desenhar os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no plano cartesiano ao lado.

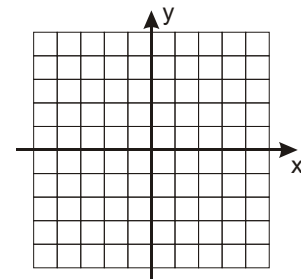


$A( \quad , \quad )$

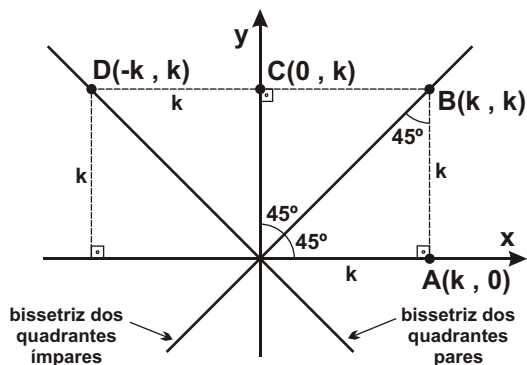
$B( \quad , \quad )$

$C( \quad , \quad )$

06) Sendo  $m$  e  $n$  números inteiros positivos, dizer em qual quadrante se localiza o ponto  $B$ , simétrico de  $A(-m, 2+n)$  em relação ao eixo das abscissas.



### III - Pontos particulares no Plano Cartesiano.



Se  $A(k, 0)$  pertence ao eixo  $x$ , então  $y_A = 0$ .

Se  $B(k, k)$  pertence à bissetriz ímpar, então  $x_B = y_B$ .

Se  $C(0, k)$  pertence ao eixo  $y$ , então  $x_C = 0$ .

Se  $d(-k, k)$  pertence à bissetriz par, então  $x_D = y_D$ .

### Exercícios

07) No sistema cartesiano ao lado, considerar cada quadrado unitário e :

a) Localizar os pontos  
 $A(6, -4)$   $B(-7, 7)$   $C(0, -4)$   $D(6, 2)$   $E(0, 0)$

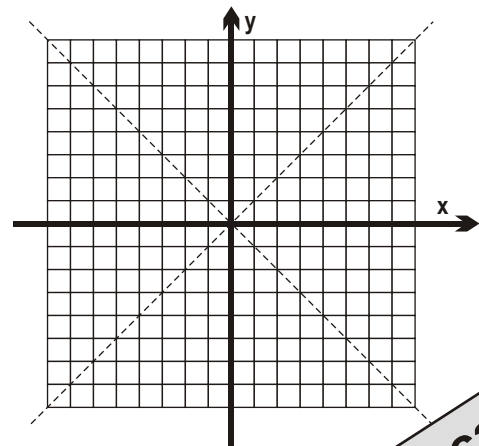
$F(-7, 0)$   $G(-5, -5)$   $H(4, -4)$   $I(2, 2)$   $J(0, 6)$

b) Dizer quais os pontos que pertencem ao eixo das abscissas.

c) Dizer quais os pontos que pertencem ao eixo das ordenadas.

d) Dizer quais os pontos que pertencem à bissetriz ímpar.

e) Dizer quais os pontos que pertencem à bissetriz par.

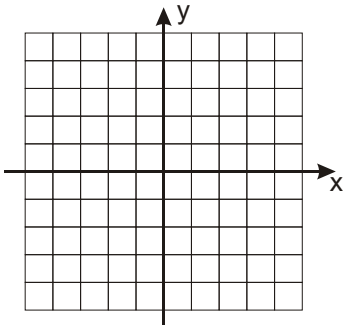


<p>08) Determinar o valor de <math>m</math> sabendo-se que o ponto <math>P(4m, 8)</math> pertence à bissetriz dos quadrantes pares.</p>	<p>09) Determinar o valor de <math>m</math> sabendo-se que o ponto <math>P(m + 7, 1 - m)</math> pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.</p>
<p>10) Determinar as coordenadas do ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares que tem ordenada igual à 5.</p>	<p>11) Determinar as coordenadas do ponto da bissetriz dos quadrantes pares que tem ordenada igual à 5.</p>
<p>12) Determinar em qual quadrante localiza-se o ponto <math>P(-4, m)</math>, sabendo que o ponto <math>Q(2 + 4m, 2m)</math> é um ponto da bissetriz dos quadrantes pares.</p>	<p>13) Determinar em qual quadrante localiza-se o ponto <math>P(3k, -k)</math>, sabendo-se que o ponto <math>Q(k + 1, 2k + 4)</math> é um ponto do eixo das abscissas.</p>
<p>14) Determinar em qual quadrante localiza-se o ponto <math>P(3k, -k)</math>, sabendo-se que o ponto <math>Q(k + 1, 2k + 4)</math> é um ponto do eixo das ordenadas.</p>	<p>15) Sendo o ponto <math>P(k - 4, t)</math> um ponto do eixo das abscissas, determinar a qual quadrante pertence o ponto <math>Q(5, t - 2)</math>.</p>
<p>16) Sendo <math>P(m, n)</math>, determinar o valor de <math>m</math> e de <math>n</math> para que o ponto <math>P</math> pertença ao eixo das ordenadas.</p>	<p>17) Sendo o ponto <math>P(-1 - m, 2m - 1)</math> um ponto da bissetriz dos quadrantes pares, determinar a qual quadrante pertence o ponto <math>Q(m, 4)</math>.</p>
<p>18) Sendo <math>P(m, n - 2)</math>, determinar o valor de <math>m</math> e de <math>n</math> para que o ponto <math>P</math> pertença ao eixo das abscissas.</p>	<p>19) Sendo o ponto <math>P(k + 3, 7)</math> um ponto do eixo das ordenadas, determinar a qual quadrante pertence o ponto <math>Q(2 - k, k)</math>.</p>

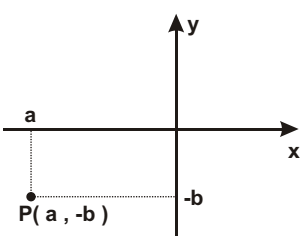


<p>20) Sendo o ponto <math>P(m, 4 + 3m)</math> um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, determinar a qual quadrante pertence o ponto <math>Q(-m, 1 + m)</math>.</p>	<p>21) Sendo o ponto <math>P(b - 3, a + 2)</math> a origem do sistema cartesiano plano, determinar a qual quadrante pertence o ponto <math>Q(a, b)</math>.</p>
<p>22) Sendo o ponto <math>P(a - 5, b + 1)</math> um ponto do eixo das abscissas, determinar a qual quadrante pertence o ponto <math>Q(2b, -b)</math>.</p>	<p>23) Sendo o ponto <math>P(d - 2, 4 - d)</math> um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, determinar a qual quadrante pertence o ponto <math>Q(-8, d)</math>.</p>
<p>24) Qual deve ser a relação entre <math>a</math> e <math>b</math> para que o ponto <math>P(5 - a, b + 2)</math> seja um ponto da bissetriz par?</p>	<p>25) Qual deve ser a relação entre <math>a</math> e <math>b</math> para que o ponto <math>P(3a + 1, b + 2)</math> seja um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares?</p>

26) Sabendo que o ponto  $P(k + 4, 3)$  é um ponto do eixo  $y$ , determinar as coordenadas de um ponto  $Q$ , simétrico de  $R(5, -k)$  em relação ao eixo  $x$ . (desenhar os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  no plano cartesiano ao lado.)



27) Sendo o ponto  $P(a, -b)$  um ponto do 3º quadrante, determinar a qual quadrante pertence cada ponto abaixo.



a) $A(a, b)$	b) $B(-a, b)$	c) $C(4, a)$
d) $D(b, a)$	e) $E(-b, 3b)$	f) $F(a.b, a)$
		g) $G(b, 0)$



IV - Medida algébrica de um segmento.

Dadas as extremidades  $A(x_A)$  e  $B(x_B)$  de um segmento  $AB$ , denomina-se *medida algébrica do segmento  $AB$*  o valor

$$\overline{AB} = x_B - x_A$$

Analogamente, tem-se

$$\overline{BA} = x_A - x_B$$

Exercícios

V - Ponto divisor de um segmento.

Dados um segmento  $AB$  e um ponto  $P$ , com  $P$  pertencente à reta  $AB$ , diz-se que  $P$  é um ponto divisor de  $AB$  e divide  $AB$  numa razão  $K$ .

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = k$$

28) Dados os pontos  $A(-7, 8)$  e  $B(5, 2)$ , determinar as coordenadas do ponto  $P$  que divide o segmento  $AB$  na razão abaixo.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = 2$$

29) Dados os pontos  $A(2, 12)$  e  $B(5, 0)$ , determinar as coordenadas dos pontos  $C$  e  $D$  que dividem o segmento  $AB$  em três partes de mesma medidas.

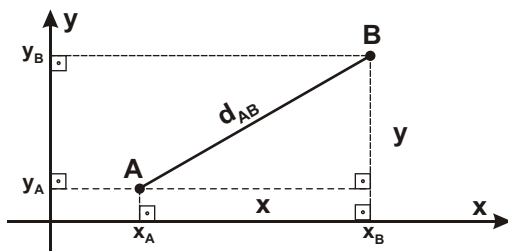
30) Dados os pontos  $A(1, 2)$  e  $B(3, -1)$ , determinar as coordenadas do ponto  $P$ , pertencente à reta  $AB$ , tal que  $\overline{AP} = 3\overline{BP}$ .

31) Dados os pontos  $A(8, 6)$  e  $B(-1, 2)$ , determinar as coordenadas o ponto  $P$ , pertencente à reta  $AB$ , tal que  $2\overline{AP} = 5\overline{PB}$ .

32) Sabendo que os pontos  $A(0, 0)$ ,  $P(1, 1)$  e  $B$  são colineares, determinar as coordenadas do ponto  $B$ , tal que  $4\overline{AP} = \overline{PB}$ .

33) Dados os pontos  $A(0, 8)$  e  $B(6, 0)$ , determinar as coordenadas do ponto  $P$ , pertencente à reta  $AB$ , tal que  $\overline{AB} = \overline{BP}$ .

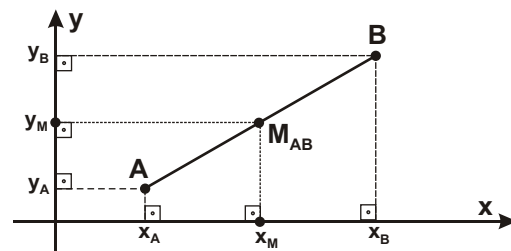
VI - Distância entre dois pontos.



Pitágoras  $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exercícios

VII - Ponto médio de um segmento



As coordenadas do ponto médio são as médias das coordenadas.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

34) Dados os pontos A(5, 8) e B(1, 2), determinar as coordenadas do ponto médio do segmento AB e a distância entre A e B.

35) Dados os pontos A(-3, 9) e B(1, -5), determinar as coordenadas do ponto médio do segmento AB e a distância entre A e B.

36) Dados os pontos A(-3, 2) e B(7, 2), determinar a distância entre A e B e as coordenadas do ponto médio do segmento AB.

37) Dado o ponto A(8, -1), determinar as coordenadas do ponto B, sabendo que o ponto M(4, 2) é o ponto médio do segmento AB.

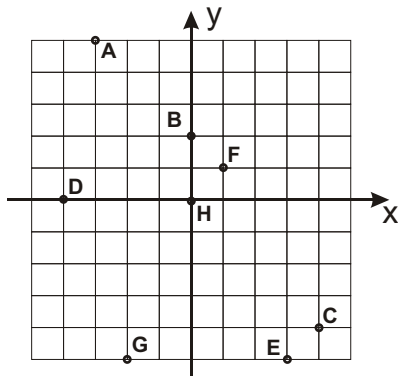
38) Dados os pontos A(0, 5), B(2, 1), C(8, -3) e D(6, -7), determinar as coordenadas do ponto médio do segmento que une o ponto médio do segmento AB ao ponto médio do segmento CD?

39) Dados os pontos A(-5, -1) e B(11, 3), determinar as coordenadas dos pontos C, D, e E, sabendo que  $AC = CD = DE = EB$  e que A, B, C, D e E são pontos colineares.

<p>40) Dados os pontos <math>A(-3, 4)</math> e <math>B(-1, 0)</math>, determinar as coordenadas do ponto do eixo das abscissas que é equidistante de <math>A</math> e de <math>B</math>.</p>	<p>41) Dados os pontos <math>A(3, 2)</math> e <math>B(7, 0)</math>, determinar as coordenadas do ponto da bissetriz dos quadrantes pares que é equidistante de <math>A</math> e de <math>B</math>.</p>
<p>42) Dados os pontos <math>A(1, -4)</math> e <math>B(-1, -8)</math>, determinar as coordenadas do ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares que é equidistante de <math>A</math> e de <math>B</math>.</p>	<p>43) Dados os pontos <math>A(5, -7)</math> e <math>B(-3, -3)</math>, determinar as coordenadas do ponto do eixo das ordenadas que é equidistante de <math>A</math> e de <math>B</math>.</p>
<p>44) Dado o ponto <math>A(6, 4)</math>, determinar as coordenadas do ponto do eixo das abscissas cuja distância ao ponto <math>A</math> é <math>5</math>.</p>	<p>45) Dado o ponto <math>A(3, 1)</math>, determinar as coordenadas do ponto que tem abscissa <math>-2</math> e cuja distância ao ponto <math>A</math> é <math>13</math>.</p>

## Respostas desta lista de exercícios. 1ª parte

01)



02)

A(-2, -3)      B(-2, 4)      C(4, 1)  
D(5, -4)      E(0, 2)      F(-3, 0)  
G(-4, 3)      H(-5, -2)

03)

P(-2, 4)      A(2, 4)      B(-2, -4)  
C(2, -4)      D(2, -2)

04)

B(-4, 1)      C(-4, -1)

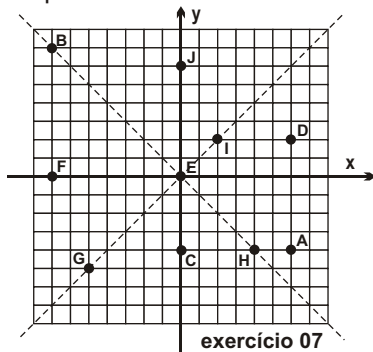
05)

A(-3, 2)      B(-3, -2)      C(3, 2)

06) B encontra-se no 3º quadrante.

07)

- b) F e E
- c) C, E e J
- d) E, G e I
- e) B, E e H



08)  $m = -2$

09)  $m = -3$

10) P(5, 5)

11) P(-5, 5)

12) 3º quadrante

13) 2º quadrante

14) 2º quadrante

15) 4º quadrante

16)  $m = 0$  e  $n \in \mathbb{R}$

17) 1º quadrante

18)  $n = 2$  e  $m \in \mathbb{R}$

19) 4º quadrante

20) 4º quadrante

21) 2º quadrante

22) 2º quadrante

23) 2º quadrante

24)  $a - b = 7$

25)  $b = 3a - 1$

26) Q(5, -4)

27)

a) 2º quadrante

b) 1º quadrante

c) 4º quadrante

d) 4º quadrante

e) 2º quadrante

f) 3º quadrante

g) eixo x

28) P(1, 4)

29) C(3, 8)      D(4, 4)

30) P(4, -5/2)

31) P(11/7, 22/7)

32) B(5, 5)

33) P(12, -8)

34)  $2\sqrt{13}$

35)  $2\sqrt{53}$

36) 10

37) B(0, 5)

38) M(4, -1)

39)

C(-1, 0)

D(3, 1)

E(7, 2)

40) P(-6, 0)

41) P(3, -3)

42) P(-4, -4)

43) P(0, -7)

44)  $k_1 = 9$  e  $k_2 = 3$

45)  $k_1 = 13$  e  $k_2 = -11$



## Pedido do Jeca

Quando faço estas listas e as disponibilizo para os meus alunos, procuro não cometer erros. Entretanto erros acontecem. Por essa razão, peço a todos que façam-me um favor. Ao encontrarem um erro de enunciado, de desenho ou de resposta, por menor que seja, mandem um e-mail para mim, especificando que lista, que exercício e qual é o erro. Dessa forma, posso corrigí-lo e melhor servir a moçada.

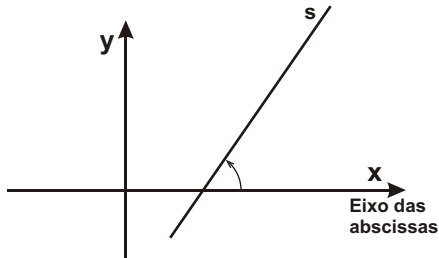
Obrigado.  
Um abraço.

Jeca

Meu e-mail [jecajeca@uol.com.br](mailto:jecajeca@uol.com.br)

### VIII - Coeficiente angular de uma reta (m)

(Conceito muito importante da Geometria Analítica)



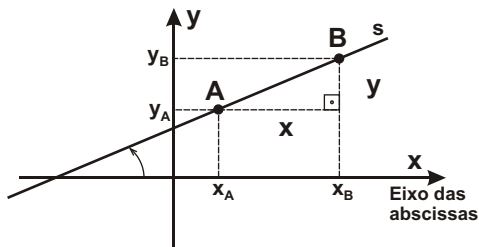
A inclinação de uma reta é o ângulo que essa reta faz com o semi-eixo positivo das abscissas.

O coeficiente angular de uma reta é a tangente do ângulo de inclinação.

$$m_s = \text{tg}$$

O coeficiente angular é um n° real que representa a direção da reta.

Determinação do coeficiente angular de uma reta através de dois pontos.

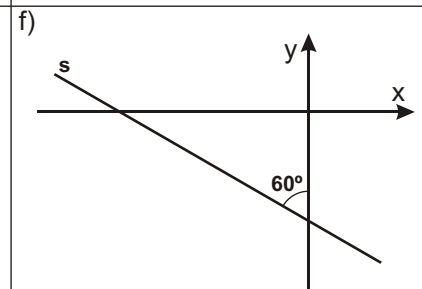
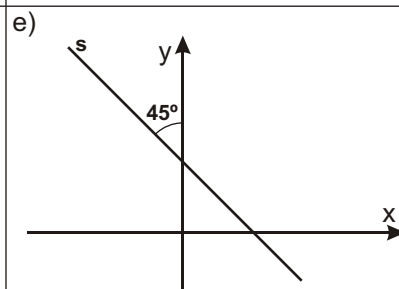
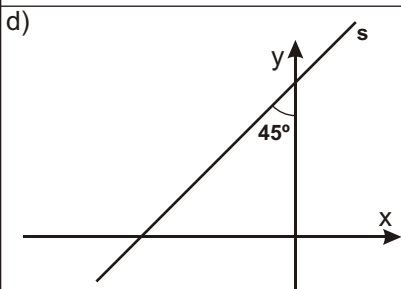
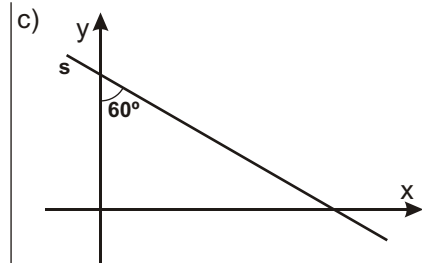
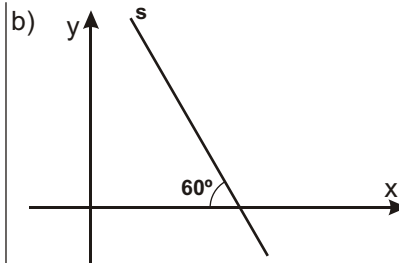
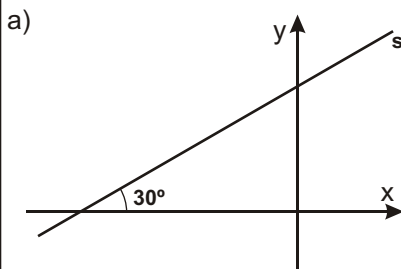


$$m = \text{tg} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{y}{x}$$

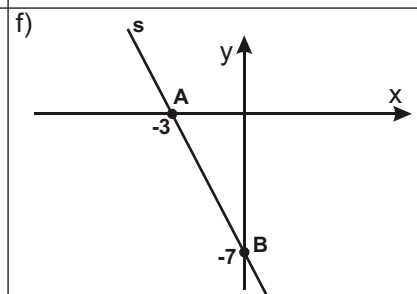
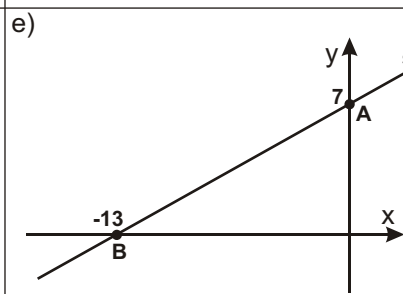
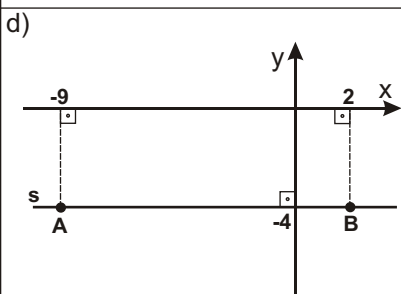
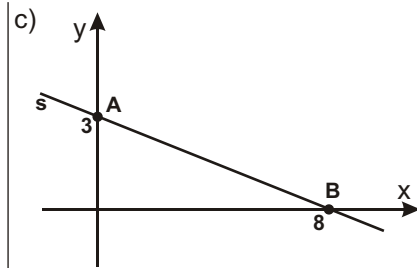
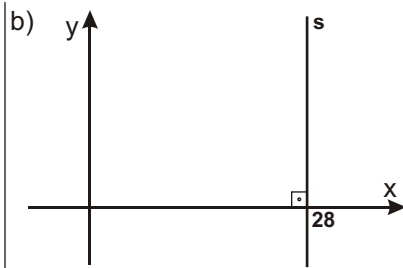
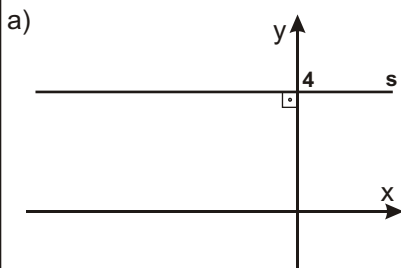
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

### Exercícios

01) Em cada caso abaixo, determinar o coeficiente angular da reta s.

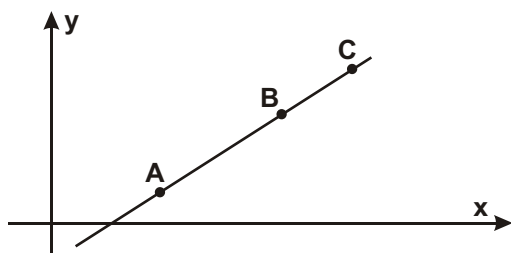


02) Em cada caso abaixo, determinar o coeficiente angular da reta  $s$ .



IX - Conceitos diretamente ligados ao coeficiente angular de uma reta.

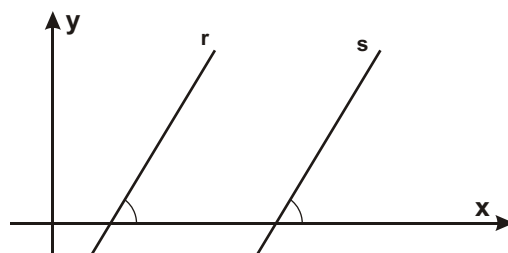
Condição de alinhamento de três pontos.



Se os pontos A, B e C estão alinhados, então

$$m_{AB} = m_{BC}$$

Retas paralelas entre si.



Se as retas  $r$  e  $s$  são paralelas entre si, então

$$m_r = m_s$$

Exercícios

03) Em cada caso abaixo, verificar se os pontos A, B e C estão alinhados.

- a) A(1, 4)  
B(5, -4)  
C(-2, 10)

- b) A(1, 3)  
B(0, -1)  
C(2, 6)

- c) A(-2, 2)  
B(-8, 0)  
C(7, 5)

04) Em cada caso abaixo, determinar k para que os pontos A, B e C estejam alinhados.		
a) A(2 , k) B(1 , -1) C(-1 , 5)	b) A(3 , -1) B(7 , 3) C(k , 4)	c) A(0 , 1) B(2 , 5) C(-2 , k)

**X - Equação fundamental da reta. (importante)**

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

m - coeficiente angular da reta.

( $x_0$  ,  $y_0$ ) - coordenadas de um ponto conhecido da reta.

**Exercícios**

05) Determinar a equação fundamental da reta que tem coeficiente angular 3 e que passa pelo ponto P(-2 , 7).	06) Determinar a equação fundamental da reta que tem coeficiente angular -5 e que passa pelo ponto P(0 , 6).
07) Determinar a equação fundamental da reta que faz um ângulo de 45° com o semi-eixo positivo das abscissas e que passa pelo ponto P(9 , -2).	08) Determinar a equação fundamental da reta que faz um ângulo de 135° com o semi-eixo positivo das abscissas e que passa pelo ponto P(0 , -5).
09) Determinar a equação fundamental da reta que passa pelos pontos A(2 , 7) e B(-5 , 3).	10) Determinar a equação fundamental da reta que passa pelos pontos A(0 , 6) e B(4 , -1).



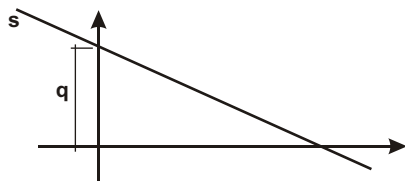
XI - Equações da reta.

1) Equação fundamental.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

3) Equação reduzida.

$$y = mx + q$$



m - coeficiente angular da reta.  
q - coeficiente linear da reta.

5) Equações paramétricas.

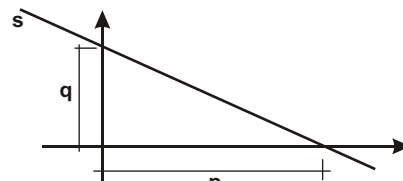
$$(s) \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

2) Equação geral.

$$ax + by + c = 0$$

4) Equação segmentária.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$



p e q são os "segmentos" que a reta determina nos eixos x e y.

As variáveis x e y são dadas em função de um parâmetro t.

Dica - Isolar, substituir e "sumir" com o t.  
(SEMPRE)

Exercícios

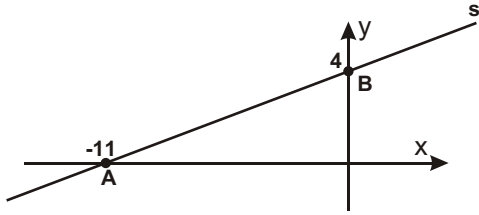
11) Dada a equação reduzida da reta (s)  $y = -2x + 12$ , determinar o coeficiente angular e o coeficiente linear de s.

12) Dada a equação geral da reta (s)  $3x - 5y + 18 = 0$ , determinar a equação reduzida, o coeficiente angular e o coeficiente linear de s.

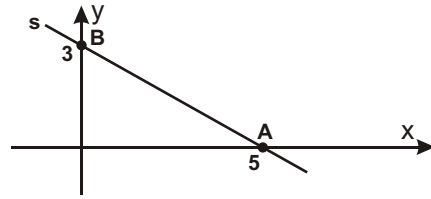
13) Determinar a equação fundamental e a equação geral da reta que tem coeficiente angular  $-4$  e passa pelo ponto  $P(2, -7)$ .

14) Determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos  $A(5, -2)$  e  $B(-1, 6)$ .

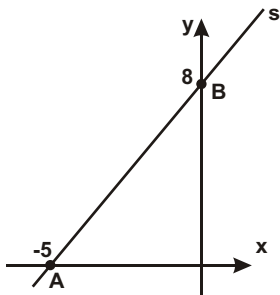
15) Determinar a equação segmentária e a equação reduzida da reta  $s$  desenhada abaixo.



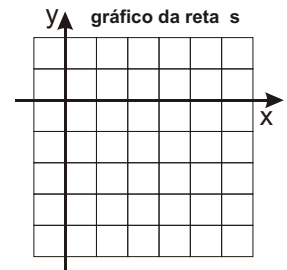
16) Determinar a equação segmentária e a equação reduzida da reta  $s$  desenhada abaixo.



17) Determinar a equação geral e a equação reduzida da reta  $s$  desenhada abaixo.



18) Dada a equação geral da reta ( $s$ )  $3x - 5y - 15 = 0$ , determinar a equação segmentária de  $s$  e desenhar a reta  $s$  no plano cartesiano.



19) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta  $s$ , determinar a equação geral de  $s$ .

$$(s) \begin{cases} x = 7 - t \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

20) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta  $s$ , determinar a equação reduzida de  $s$ .

$$(s) \begin{cases} x = \frac{3t - 4}{2} \\ y = 2 - 3t \end{cases}$$

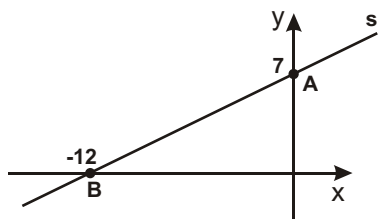
21) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta  $s$ , determinar a equação segmentária de  $s$ .

$$(s) \begin{cases} x = \frac{t+3}{2} \\ y = t-1 \end{cases}$$

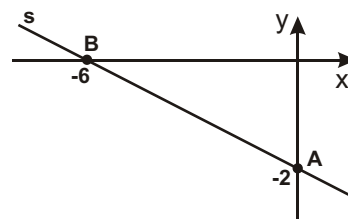
22) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta  $s$ , determinar o coeficiente linear de  $s$ .

$$(s) \begin{cases} x = 3-t \\ y = t+2 \end{cases}$$

23) Determinar a equação segmentária e a equação geral da reta  $s$  desenhada abaixo.

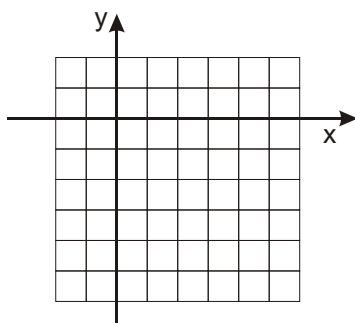


24) Determinar a equação segmentária e a equação reduzida da reta  $s$  desenhada abaixo.



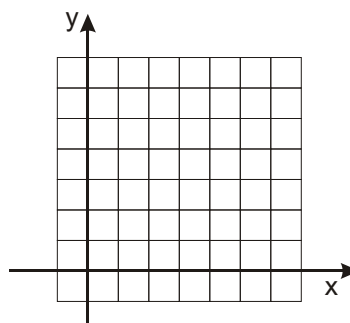
25) Dada abaixo a equação segmentária da reta  $s$ , desenhar o gráfico de  $s$ .

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1$$



26) Dada abaixo a equação segmentária da reta  $s$ , determinar a equação geral e desenhar o gráfico de  $s$ .

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$$

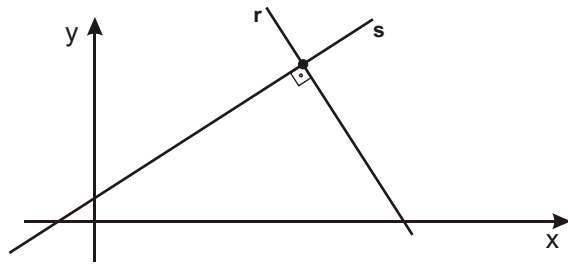


## XII - Retas perpendiculares entre si.

Se as retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares entre si, então

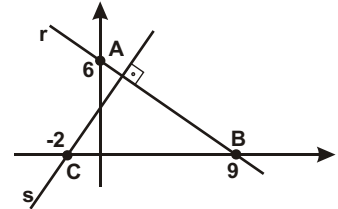
$$m_r = -\frac{1}{m_s} \quad (\text{ou } m_r \cdot m_s = -1)$$

### Exercícios



27) Determinar a equação geral da reta que passa pelo ponto  $P(2, 7)$  e é perpendicular à reta  $(s) y = 3x - 1$ .

28) Determinar a equação geral da reta  $s$  desenhada abaixo.



29) Dada a equação da reta  $(r) y = -5x + 9$ , determinar:  
a) a equação geral da reta  $s$  que é paralela a  $r$  e passa pelo ponto  $P(7, -2)$ ;  
b) a equação geral da reta  $t$  que é perpendicular a  $r$  e passa pelo ponto  $Q(12, 4)$ .

30) Dado o ponto  $P(5, -1)$ , determinar:  
a) a equação geral da reta que passa por  $P$  e é paralela à reta  $(s) y - 2 = 0$ ;  
b) a equação geral da reta que passa por  $P$  e é perpendicular à reta  $(s) y - 2 = 0$ .

31) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta  $s$ , determinar a equação reduzida da reta  $t$  que passa pelo ponto  $P(-3, 4)$  e é perpendicular à reta  $s$ .

$$(s) \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2t \end{cases}$$

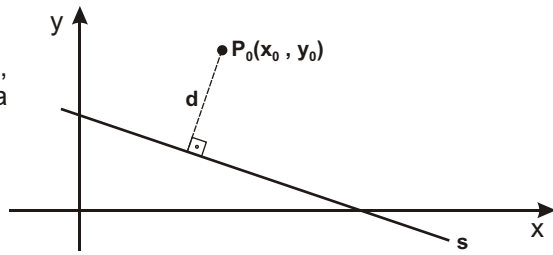
32) Determinar a equação geral da reta que passa pelo ponto  $P(0, -3)$  e é paralela à reta  $x + 4y - 2 = 0$ .



**XIII - Distância entre ponto e reta**

Dada a **equação geral** da reta (s)  $ax + by + c = 0$ , a distância entre s e um ponto  $P_0(x_0, y_0)$  é dada por

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



**Exercícios**

33) Determinar a distância entre a reta  $3x + 2y - 9 = 0$  e o ponto  $P(2, -5)$ .

34) Determinar a distância entre a reta  $y = 6x - 1$  e o ponto  $P(4, 7)$ .

35) Dada abaixo a equação segmentária da reta s, determinar a distância entre s e o ponto  $P(-3, 8)$ .

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{7} = 1$$

36) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determinar a distância entre s e o ponto  $P(1, -7)$ .

$$(s) \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

37) Determinar a distância entre as retas  $3x - 2y + 8 = 0$  e  $3x - 2y - 8 = 0$ .

38) Determinar a distância entre a origem do sistema cartesiano e a reta  $6x - y + 9 = 0$ .

<p>39) Verificar se os pontos <math>A(1, -4)</math> e <math>B(3, -1)</math> estão contidos na reta <math>(s) 3x + 2y + 5 = 0</math>.</p>	<p>40) Determinar <math>k</math> sabendo que o ponto <math>P(-2, 0)</math> está contido na reta <math>4x - 3y + k = 0</math>.</p>
<p>41) Determinar as coordenadas do ponto onde a reta <math>(s) 2x + 5y - 12 = 0</math> intercepta a bissetriz dos quadrantes pares.</p>	<p>42) Dadas as retas <math>(r) x - 6 = 0</math> e <math>(s) 2x + 5y - 2 = 0</math>, determinar as coordenadas do ponto de intersecção entre <math>r</math> e <math>s</math>.</p>
<p>43) Dadas as retas <math>(r) x + y + 1 = 0</math> e <math>(s) 3x + y - 5 = 0</math>, determinar as coordenadas do ponto de intersecção entre <math>r</math> e <math>s</math>.</p>	<p>44) Dadas as retas <math>(r) 2x - y + 4 = 0</math> e <math>(s) y = x + 3</math>, determinar as coordenadas do ponto de intersecção entre <math>r</math> e <math>s</math>.</p>

Respostas desta lista de exercícios.  
2ª parte

- 01)  
a)  $\sqrt{3}/3$   
b)  $-\sqrt{3}$   
c)  $-\sqrt{3}/3$   
d) 1  
e) -1  
f)  $-\sqrt{3}/3$

- 02)  
a) 0  
b)  $\frac{1}{3}m$   
c)  $-3/8$   
d) 0  
e)  $7/13$   
f)  $-7/3$

- 03)  
a) está alinhado  
b) não está alinhado  
c) está alinhado

- 04)  
a) -4  
b) 8  
c) -3

05)  $y - 7 = 3(x + 2)$

06)  $y - 6 = -5(x - 0)$

07)  $y + 2 = 1(x - 9)$

08)  $y + 5 = -1(x - 0)$

09)  $y - 7 = \frac{4}{7}(x - 2)$  ou  $y - 3 = \frac{4}{7}(x + 5)$

10)  $y - 6 = \frac{-7}{4}(x - 0)$  ou  $y + 1 = \frac{-7}{4}(x - 4)$

11)  $m = -2$  e  $q = 12$

12)  $m = 3/5$  e  $q = 18/5$

13)  $y + 7 = -4(x - 2)$        $4x + y - 1 = 0$

14)  $4x + 3y - 14 = 0$

15)  $\frac{x}{-11} + \frac{y}{4} = 1$        $y = \frac{4}{11}x + 4$

16)  $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$        $y = \frac{-3}{5}x + 3$

17)  $8x - 5y + 40 = 0$        $y = \frac{8}{5}x + 8$

18)  $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$

19)  $2x + y - 15 = 0$

20)  $y = -2x + 2$

21)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$

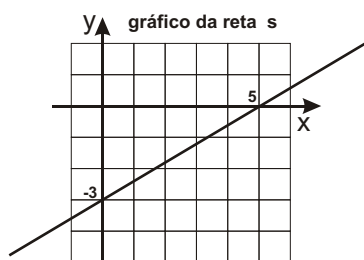


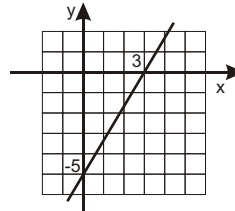
Gráfico do exercício 18

22)  $q = 5$

23)  $\frac{x}{-12} + \frac{y}{7} = 1$

24)  $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-2} = 1$

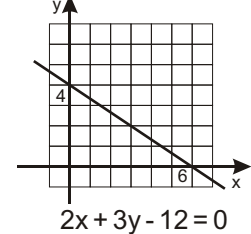
25) Gráfico



$7x - 12y + 84 = 0$

$y = \frac{-x}{3} - 2$

26) Gráfico



27)  $x + 3y - 23 = 0$

28)  $3x - 2y + 6 = 0$

29) a)  $5x + y - 33 = 0$

b)  $x - 5y + 8 = 0$

30) a)  $y + 1 = 0$

b)  $x - 5 = 0$

31)  $y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$

32)  $x + 4y + 12 = 0$

33)  $\sqrt{13}$

34)  $16\sqrt{37}/37$

35)  $17\sqrt{65}/65$

36)  $5\sqrt{2}$

37)  $16\sqrt{13}/13$

38)  $9\sqrt{37}/37$

39) A está contido na reta.

B não está contido na reta.

40)  $k = 8$

41)  $P(-4, 4)$

42)  $I(6, -2)$

43)  $I(3, -4)$

44)  $I(-1, 2)$

## Pedido do Jeca

Quando faço estas listas e as disponibilizo para os meus alunos, procuro não cometer erros. Entretanto erros acontecem. Por essa razão, peço a todos que façam-me um favor. Ao encontrarem um erro de enunciado, de desenho ou de resposta, por menor que seja, mandem um e-mail para mim, especificando que lista, que exercício e qual é o erro. Dessa forma, posso corrigí-lo e melhor servir a moçada.

Obrigado.  
Um abraço.

Jeca

Meu e-mail [jecajeca@uol.com.br](mailto:jecajeca@uol.com.br)

**Jeca**

### XIV - Equação da circunferência.

#### Equação reduzida da circunferência

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

onde  $x_c$  e  $y_c$  são as coordenadas do centro da circunferência e  $R$  é o raio.

#### Equação normal (ou geral) da circunferência

$$x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - R^2 = 0$$

### Exercícios

01) Em cada caso abaixo, dados o centro e o raio, determinar as equações reduzida e normal da circunferência.

a) $C(4, 9), R=5$	b) $C(-4, 7), R=1$	c) $C(3, -8), R=2$
d) $C(0, -4), R=3$	e) $C(6, 0), R=\sqrt{3}$	f) $C(0, 0), R=\sqrt{13}$
g) $C(25, -4), R=\sqrt{37}$	h) $C(0, -1), R=\sqrt{3}$	i) $C(2, 5), R=-7$

j) C(-1, -1), R = 20	l) C(0, -12), R = 6	m) C(-5, $\sqrt{7}$ ), R = $\sqrt{43}$
n) C(2, -2), R = 2	o) C(-6, -1), R = 9	p) C(0, 0), R = $\sqrt{2}$

02) Dada a equação reduzida, determinar o centro e o raio de cada circunferência abaixo.

a) $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 16$ C(     ,     ), R =	b) $(x+7)^2 + (y-2)^2 = 36$ C(     ,     ), R =	c) $(x-5)^2 + (y+13)^2 = 64$ C(     ,     ), R =
d) $(x+10)^2 + (y+8)^2 = 1$ C(     ,     ), R =	e) $x^2 + (y+9)^2 = 31$ C(     ,     ), R =	f) $(x-5)^2 + y^2 = 64$ C(     ,     ), R =
g) $x^2 + y^2 = 64$ C(     ,     ), R =	h) $(x+15)^2 + (y+1)^2 = 5$ C(     ,     ), R =	i) $(x-5)^2 + y^2 = 4$ C(     ,     ), R =
j) $x^2 + (y-3)^2 = 64$ C(     ,     ), R =	k) $(x+1)^2 + y^2 = 23$ C(     ,     ), R =	l) $x^2 + y^2 = 8$ C(     ,     ), R =
m) $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 7$ C(     ,     ), R =	n) $x^2 + (y-2)^2 = 27$ C(     ,     ), R =	o) $(x-3)^2 + y^2 = 225$ C(     ,     ), R =
p) $(x+5)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{7}$ C(     ,     ), R =	q) $x^2 + (y+9)^2 - 27 = 0$ C(     ,     ), R =	r) $(x+12)^2 + y^2 = 400$ C(     ,     ), R =



XV - Obtenção de centro e raio através da equação normal da circunferência.

$$\begin{cases} -2x_c = \text{coeficiente do termo em } x. \\ -2y_c = \text{coeficiente do termo em } y. \\ x_c^2 + y_c^2 - R^2 = \text{termo independente.} \end{cases}$$

**Justificativa**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - R^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 8x - 12y + 43 &= 0 \end{aligned}$$

**Exercícios**

03) Dada a equação normal, determinar o centro, o raio e a equação reduzida de cada circunferência abaixo, se existir.

<p>a) <math>x^2 + y^2 - 12x - 2y + 12 = 0</math> <b>centro</b></p> <p><b>Raio</b></p> <p>C( , ), R= <b>Equação reduzida</b></p>	<p>b) <math>x^2 + y^2 + 4x - 8y + 6 = 0</math> <b>centro</b></p> <p><b>Raio</b></p> <p>C( , ), R= <b>Equação reduzida</b></p>	<p>c) <math>x^2 + y^2 - 2x + 4y + 17 = 0</math> <b>centro</b></p> <p><b>Raio</b></p> <p>C( , ), R= <b>Equação reduzida</b></p>
<p>d) <math>x^2 + y^2 - 12y + 11 = 0</math> <b>centro</b></p> <p><b>Raio</b></p> <p>C( , ), R= <b>Equação reduzida</b></p>	<p>e) <math>x^2 + y^2 - 81 = 0</math> <b>centro</b></p> <p><b>Raio</b></p> <p>C( , ), R= <b>Equação reduzida</b></p>	<p>f) <math>x^2 + y^2 + 2x + 10y + 22 = 0</math> <b>centro</b></p> <p><b>Raio</b></p> <p>C( , ), R= <b>Equação reduzida</b></p>



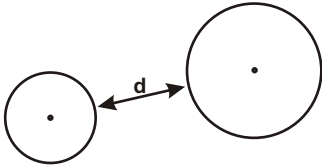
<p>g) <math>x^2 + y^2 + 3x - 6y + 11 = 0</math> <u>centro</u></p> <p><u>Raio</u></p> <p>C( , ), R= <u>Equação reduzida</u></p>	<p>h) <math>x^2 + y^2 - 6x + 13 = 0</math> <u>centro</u></p> <p><u>Raio</u></p> <p>C( , ), R= <u>Equação reduzida</u></p>	<p>i) <math>-2x^2 - 2y^2 - 4x + 8y + 22 = 0</math> <u>centro</u></p> <p><u>Raio</u></p> <p>C( , ), R= <u>Equação reduzida</u></p>
<p>j) <math>x^2 + 3y^2 - 12y + 11 = 0</math> <u>centro</u></p> <p><u>Raio</u></p> <p>C( , ), R= <u>Equação reduzida</u></p>	<p>l) <math>x^2 + y^2 + xy - 3y - 9 = 0</math> <u>centro</u></p> <p><u>Raio</u></p> <p>C( , ), R= <u>Equação reduzida</u></p>	<p>m) <math>4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y + 4 = 0</math> <u>centro</u></p> <p><u>Raio</u></p> <p>C( , ), R= <u>Equação reduzida</u></p>
<p>n) <math>3x^2 - 3y^2 - 18x + 16 = 0</math> <u>centro</u></p> <p><u>Raio</u></p> <p>C( , ), R= <u>Equação reduzida</u></p>	<p>o) <math>x^2 + y^2 + 6xy - 8y - 4 = 0</math> <u>centro</u></p> <p><u>Raio</u></p> <p>C( , ), R= <u>Equação reduzida</u></p>	<p>p) <math>5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y - 25 = 0</math> <u>centro</u></p> <p><u>Raio</u></p> <p>C( , ), R= <u>Equação reduzida</u></p>



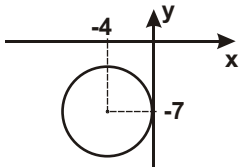
04) Na equação abaixo, determine os valores de A, B, C, D e E para que a mesma represente uma circunferência de centro  $(-2, 1)$  e raio 6.

$$2x^2 + Ay^2 - Bxy + Cx + Dy + E = 0$$

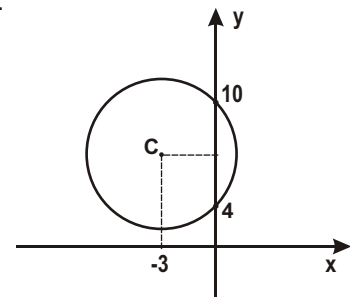
05) Qual a distância  $d$  entre as circunferências  $(C_1) (x-5)^2 + (y+3)^2 = 4$  e  $(C_2) x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ ?



06) Determinar a equação reduzida e a equação normal da circunferência abaixo.



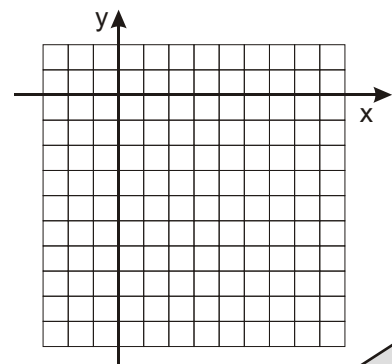
07) Determinar a equação reduzida e a equação normal da circunferência ao lado.



08) Dada a circunferência  $( ) x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$ , determinar:

- o centro e o raio dessa circunferência.
- o ponto A de que tem a maior abscissa.
- o ponto B de que tem a menor ordenada.

(DICA - Após achar o centro e o raio, desenhar a circunferência)



09) Dada a circunferência ( )  $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ , determinar :

a) o centro e o raio dessa circunferência.

b) o ponto A de que tem a menor abscissa.

c) o ponto B de que tem a maior ordenada.

(DICA - Após achar o centro e o raio, desenhar a circunferência)

10) Determinar quantos pontos da circunferência  $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 49 = 0$  pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas.

11) Determinar quantos pontos da circunferência  $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 1 = 0$  pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas.

12) Determinar quantos pontos da circunferência  $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 27 = 0$  pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas.

13) Determinar quantos pontos da circunferência  $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$  pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas.

14) Determinar quantos pontos da circunferência  $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 9 = 0$  pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas.

15) Determinar quantos pontos da circunferência  $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 16$  pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas.

16) Determinar as coordenadas dos pontos da circunferência  $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 9$  que têm abscissa  $-2$ .

17) Determinar as coordenadas dos pontos da circunferência  $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 9$  que têm ordenada  $-2$ .

18) Determinar as coordenadas dos pontos de intersecção entre a circunferência  $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 33 = 0$  e a reta  $7x + y - 27 = 0$ , se existirem.

19) Determinar as coordenadas dos pontos de intersecção entre a circunferência  $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$  e a reta  $2x - y = 0$ , se existirem.

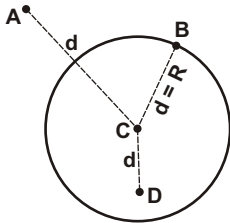
20) Determinar equação geral da reta que tangencia a circunferência  $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 33 = 0$  no ponto  $P(10, 7)$ .

Respostas desta lista de exercícios.  
3ª parte

<p>01)</p> <p>a) <math>(x-4)^2 + (y-9)^2 = 25</math>     <math>x^2 + y^2 - 8x - 18y + 72 = 0</math></p> <p>b) <math>(x+4)^2 + (y-7)^2 = 1</math>     <math>x^2 + y^2 + 8x - 14y + 64 = 0</math></p> <p>c) <math>(x-3)^2 + (y+8)^2 = 4</math>     <math>x^2 + y^2 - 6x + 16y + 69 = 0</math></p> <p>d) <math>x^2 + (y+4)^2 = 9</math>     <math>x^2 + y^2 + 8y + 7 = 0</math></p> <p>e) <math>(x-6)^2 + y^2 = 3</math>     <math>x^2 + y^2 - 12x + 33 = 0</math></p> <p>f) <math>x^2 + y^2 = 13</math>     <math>x^2 + y^2 - 13 = 0</math></p> <p>g) <math>(x-25)^2 + (y+4)^2 = 37</math>     <math>x^2 + y^2 - 50x + 8y + 604 = 0</math></p> <p>h) <math>x^2 + (y+1)^2 = 3</math>     <math>x^2 + y^2 + 2y - 2 = 0</math></p> <p>i) não existe circunferência com raio negativo</p> <p>j) <math>(x+1)^2 + (y+1)^2 = 400</math>     <math>x^2 + y^2 + 2x + 2y - 398 = 0</math></p> <p>l) <math>x^2 + (y+12)^2 = 36</math>     <math>x^2 + y^2 + 24y + 108 = 0</math></p> <p>m) <math>(x+5)^2 + (y-\sqrt{7})^2 = 43</math>     <math>x^2 + y^2 + 10x - 2\sqrt{7}y - 11 = 0</math></p> <p>n) <math>(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4</math>     <math>x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0</math></p> <p>o) <math>(x+6)^2 + (y+1)^2 = 81</math>     <math>x^2 + y^2 + 12x + 2y - 44 = 0</math></p> <p>p) <math>x^2 + y^2 = 2</math>     <math>x^2 + y^2 - 2 = 0</math></p> <p>02)</p> <p>a) C(5, 2) e R=4</p> <p>b) C(-7, 2) e R=6</p> <p>c) C(5, -13) e R=8</p> <p>d) C(-10, -8) e R=1</p> <p>e) C(0, -9) e R=<math>\sqrt{31}</math></p> <p>f) C(5, 0) e R=8</p> <p>g) C(0, 0) e R=8</p> <p>h) C(-15, -1) e R=<math>\sqrt{5}</math></p> <p>i) C(5, 0) e R=2</p> <p>j) C(0, 3) e R=8</p> <p>k) C(-1, 0) e R=<math>\sqrt{23}</math></p> <p>l) C(0, 0) e R=<math>2\sqrt{2}</math></p> <p>m) C(5, 1) e R=<math>\sqrt{7}</math></p> <p>n) C(0, 2) e R=<math>3\sqrt{3}</math></p> <p>o) C(3, 0) e R=15</p> <p>p) C(-5, -1) e R=<math>\sqrt[4]{7}</math></p> <p>q) C(0, -9) e R=<math>3\sqrt{3}</math></p> <p>r) C(-12, 0) e R=20</p> <p>03)</p> <p>a) C(6, 1), R=5     <math>(x-6)^2 + (y-1)^2 = 25</math></p> <p>b) C(-2, 4), R=<math>\sqrt{14}</math>     <math>(x+2)^2 + (y-4)^2 = 14</math></p> <p>c) não existe a circunferência (<math>R^2 = -12</math>)</p> <p>d) C(0, 6), R=<math>\sqrt{47}</math>     <math>x^2 + (y-6)^2 = 47</math></p> <p>e) C(0, 0), R=9     <math>x^2 + y^2 = 81</math></p> <p>f) C(-1, -5), R=2     <math>(x+1)^2 + (y+5)^2 = 4</math></p> <p>g) C(-3/2, 3), R=1/2     <math>(x+3/2)^2 + (y-3)^2 = 1/4</math></p> <p>h) não existe a circunferência (<math>R^2 = -4</math>)</p> <p>i) C(-1, 2), R=4     <math>(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16</math></p> <p>j) não é equação de circunferência</p> <p>l) não é equação de circunferência</p> <p>m) C(1, -2), R=2     <math>(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4</math></p> <p>n) não é equação de circunferência</p> <p>o) não é equação de circunferência</p> <p>p) C(1, -1), R=<math>\sqrt{7}</math>     <math>(x-1)^2 + (y+1)^2 = 7</math></p> <p>04) A=2, B=0, C=8, D=-4 e E=-62</p>	<p>05) <math>d = 4\sqrt{5} - 5</math></p> <p>06) <math>(x+4)^2 + (y+7)^2 = 16</math>     <math>x^2 + y^2 + 8x + 14y + 49 = 0</math></p> <p>07) <math>(x+3)^2 + (y-7)^2 = 18</math>     <math>x^2 + y^2 + 6x - 14y + 40 = 0</math></p> <p>08) a) C(2, -5), R=3    b) A(5, -5)    c) B(2, -8)</p> <p>09) a) C(-3, 4), R=<math>\sqrt{10}</math> b) A(-3 - <math>\sqrt{10}</math>, 4)    c) B(-3, 4 + <math>\sqrt{10}</math>)</p> <p>10) 1 ponto no eixo y</p> <p>11) 4 pontos (2 no eixo x e 2 no eixo y)</p> <p>12) 2 pontos no eixo x</p> <p>13) 2 pontos (1 no eixo x e 1 no eixo y)</p> <p>14) 3 pontos (2 no eixo x e 1 no eixo y)</p> <p>15) a circunferência não corta os eixos</p> <p>16) <math>P_1(-2, 1 + \sqrt{5})</math>     <math>P_2(-2, 1 - \sqrt{5})</math></p> <p>17) <math>P_1(-4, -2)</math></p> <p>18) <math>P_1(4, -1)</math>     <math>P_2(3, 6)</math></p> <p>19) não existe intersecção</p> <p>20) <math>3x + 4y - 58 = 0</math></p> <p style="text-align: center;"><u>Pedido do Jeca</u></p> <p>Quando faço estas listas e as disponibilizo para os meus alunos, procuro não cometer erros. Entretanto erros acontecem. Por essa razão, peço a todos que façam-me um favor. Ao encontrarem um erro de enunciado, de desenho ou de resposta, por menor que seja, mandem um e-mail para mim, especificando que lista, que exercício e qual é o erro. Dessa forma, posso corrigi-lo e melhor servir a moçada.</p> <p style="text-align: right;">Obrigado. Um abraço.</p> <p style="text-align: right;">Jeca</p> <p>Meu e-mail    <a href="mailto:jecajeca@uol.com.br">jecajeca@uol.com.br</a></p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



### XVI - Posições relativas entre ponto, reta e circunferência.



- A - ponto exterior
- B - ponto da circunferência
- D - ponto interior

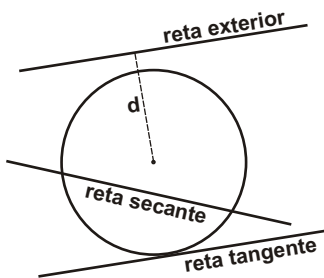
1º método - Comparar a distância  $d$  entre o ponto e o centro da circunferência, com o raio  $R$ .

- a) se  $d > R$ , o ponto é exterior à circunferência.
- b) se  $d = R$ , o ponto pertence à circunferência.
- c) se  $d < R$ , o ponto está no interior da circunferência.

2º método - Substituir as coordenadas do ponto na expressão

$$E = x_p^2 + y_p^2 - 2x_c x_p - 2y_c y_p + x_c^2 + y_c^2 - R^2 \text{ "equação normal"}$$

- a) se  $E > 0$ , o ponto é exterior.
- b) se  $E = 0$ , o ponto pertence à circunferência.
- c) se  $E < 0$ , o ponto está no interior da circunferência.



1º método - Comparar a distância  $d$  entre a reta e o centro da circunferência, com o raio  $R$ .

- a) se  $d > R$ , a reta é exterior à circunferência.
- b) se  $d = R$ , a reta é tangente à circunferência.
- c) se  $d < R$ , a reta é secante à circunferência.

2º método - Resolver o sistema de equações procurando as interseções entre a reta e a circunferência.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \end{cases}$$

- a) se  $> 0$ , a reta é secante pois tem 2 soluções.
- b) se  $= 0$ , a reta é tangente pois tem apenas uma solução.
- c) se  $< 0$ , a reta é exterior pois não tem nenhuma solução.

### Exercícios

01) Utilizando os 2 métodos acima propostos, verificar a posição do ponto  $P(5, 8)$  em relação à circunferência  $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 36$ .

1º método

2º método

02) Utilizando os 2 métodos acima propostos, verificar a posição da reta  $x + 3y - 10 = 0$  em relação à circunferência  $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$ .

1º método

2º método

<p>03) Dados os pontos A(1, 5) e B(-2, -1), determinar as posições de A e de B em relação à circunferência <math>x^2 + y^2 - 8x + 2y - 19 = 0</math>.</p>	<p>04) Dados os pontos A(6, 1) e B(5, 7), determinar as posições de A e de B em relação à circunferência <math>(x-8)^2 + (y-3)^2 = 16</math></p>
<p>05) Determinar o valor de k para que o ponto P(2, k) seja um ponto exterior à circunferência <math>x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0</math></p>	<p>06) Determinar o valor de k para que o ponto P(k, -1) seja um ponto interior à circunferência <math>x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0</math></p>
<p>07) Determinar a posição da reta (r) <math>3x + y - 6 = 0</math> em relação à circunferência <math>x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0</math>.</p>	<p>08) Determinar a posição da reta (r) <math>x - y + 4 = 0</math> em relação à circunferência <math>(x-5)^2 + (y+1)^2 = 9</math></p>

09) Determinar a posição da reta  $7x + y - 18 = 0$  em relação à circunferência  $( ) x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$  e as coordenadas dos pontos de intersecção, se existirem.

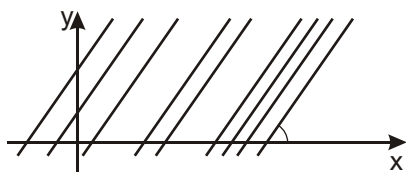
10) Determinar a posição da reta  $3x + 4y + 6 = 0$  em relação à circunferência  $( ) x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$  e as coordenadas dos pontos de intersecção, se existirem.

11) Determinar a posição da reta  $4x - 3y + 8 = 0$  em relação à circunferência  $( ) x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$  e as coordenadas dos pontos de intersecção, se existirem.

12) Determinar a posição da reta  $x + 7y - 6 = 0$  em relação à circunferência  $( ) x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$  e as coordenadas dos pontos de intersecção, se existirem.

**XVII - Feixe de retas.**

Feixe de retas paralelas.

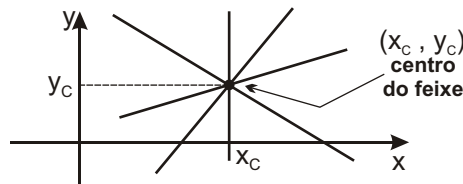


$ax + by + k = 0$  equação geral do feixe  
 $k \in \mathbb{R}$

$y = mx + k'$  equação reduzida do feixe  
 $k' \in \mathbb{R}$

**Exercícios**

Feixe de retas concorrentes.



$y - y_c = m(x - x_c)$  equação fundamental do feixe  
 $m \in \mathbb{R}$  ou  $\nexists m$

13) Determinar a equação geral do feixe de retas paralelas à reta  $x + 4y - 3 = 0$ .

14) Determinar a equação reduzida do feixe de retas paralelas à reta  $2x - 5y + 1 = 0$ .

15) Determinar a equação reduzida do feixe de retas paralelas à reta  $y = -3x + 5$ .

16) Determinar a equação reduzida do feixe de retas paralelas à reta  $y + 4 = 0$ .

17) Determinar a equação geral do feixe de retas paralelas à reta  $x - 5 = 0$ .

18) Determinar a equação fundamental do feixe de retas concorrentes no ponto  $P(-2, 5)$ .

19) Determinar a equação fundamental do feixe de retas concorrentes na origem do sistema cartesiano.

20) Determinar a equação fundamental do feixe de retas concorrentes no ponto  $P(7, -3)$ .

21) Determinar a equação geral do feixe de retas concorrentes no ponto  $P(-4, 1)$ .

22) Determinar a equação geral do feixe de retas concorrentes no ponto  $P(7, -3)$ .



23) Determinar a equação geral do feixe de retas concorrentes que contém as retas  $x + y - 3 = 0$  e  $2x - y + 9 = 0$ .

24) Determinar a equação geral do feixe de retas concorrentes que contém as retas  $y = x + 2$  e  $x + 2y - 7 = 0$ .

25) Determinar a equação geral do feixe de retas concorrentes que contém as retas  $3x + y = 0$  e  $x - y - 4 = 0$ .

26) Determinar as equações gerais das retas que passam pelo ponto  $P(13, 3)$  e são tangentes à circunferência  $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 25$ .

27) Determinar as equações gerais das retas que passam pelo ponto  $P(5, 4)$  e são tangentes à circunferência  $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 5$ .

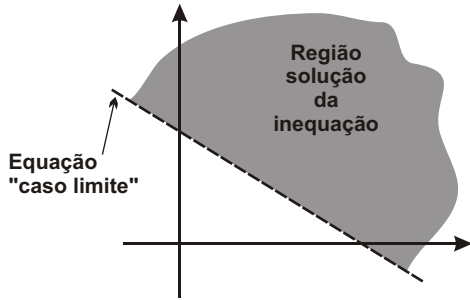
28) Determinar as equações gerais das retas que passam pelo ponto  $P(-3, 1)$  e são tangentes à circunferência  $(x-5)^2 + (y-7)^2 = 36$ .

29) Determinar as equações gerais das retas tangentes à circunferência  $(x+3)^2 + (y-7)^2 = 1$ , que são paralelas à reta  $y = -3x + 5$ .

30) Determinar as equações gerais das retas paralelas à reta  $3x - 2y + 8 = 0$ , que são tangentes à circunferência  $x^2 + y^2 - 4y - 32 = 0$

31) Determinar as equações reduzidas das retas que passam pelo ponto  $P(-2, 8)$  e são tangentes à circunferência  $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$ .

XVIII - Inequações.



**Convenção**

Linha cheia ———— ( $\geq$  ou  $\leq$ )

Linha tracejada - - - - - ( $>$  ou  $<$ )

**Resolução gráfica de inequações.**

- 1) Achar o "caso limite" transformando a inequação em equação (mudar  $>$  ou  $<$  para  $=$ )
- 2) Desenhar o "caso limite" usando a convenção adotada. ( ———— ou - - - - - )
- 3) Testar na **inequação** as coordenadas de um ponto não pertencente ao "caso limite". (se possível usar a origem  $O(0, 0)$ )
- 4) Se o ponto testado satisfizer a inequação, então esse ponto é parte da "Região solução". Se não satisfizer, a "Região solução" é a parte do plano que não contém o ponto testado.

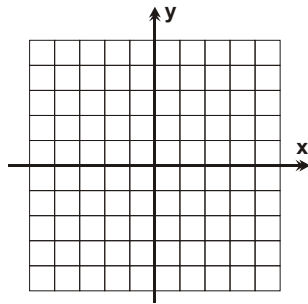
**Exercícios**

Importante: Equação = curva

Inequação = região do plano que começa numa curva.

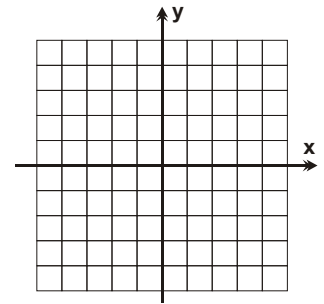
32) Resolver graficamente a inequação abaixo.

$$x - 4 < 0$$



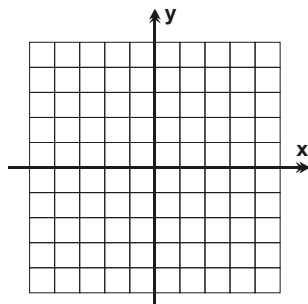
33) Resolver graficamente a inequação abaixo.

$$2x + 6 \geq 0$$



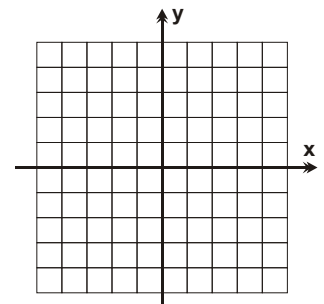
34) Resolver graficamente a inequação abaixo.

$$y - 2 < 0$$



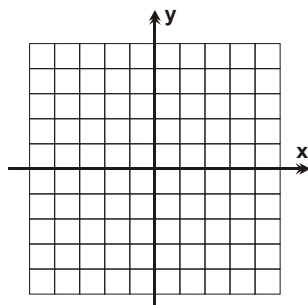
35) Resolver graficamente a inequação abaixo.

$$3y - 3 \leq 0$$



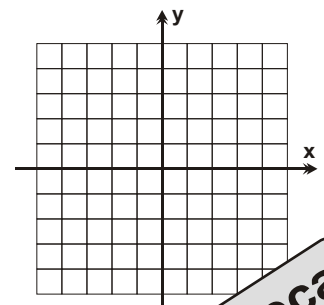
36) Resolver graficamente a inequação abaixo.

$$x + y - 2 \geq 0$$



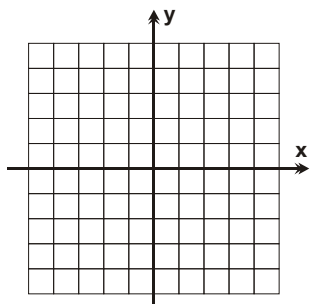
37) Resolver graficamente a inequação abaixo.

$$y < 2x + 4$$



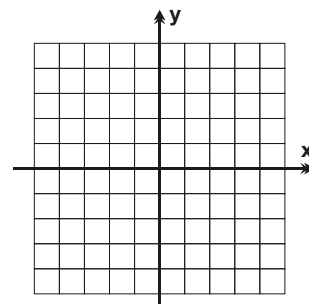
38) Resolver graficamente a inequação abaixo.

$$x - 3y + 3 \leq 0$$



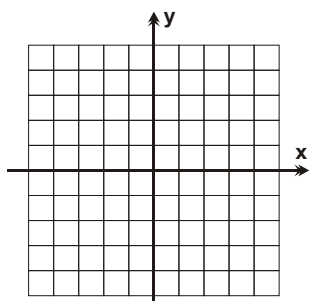
39) Resolver graficamente a inequação abaixo.

$$4x + y + 4 > 0$$



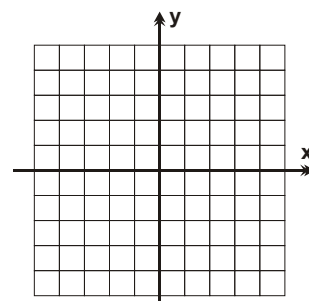
40) Resolver graficamente a inequação abaixo.

$$x^2 + y^2 \geq 16$$



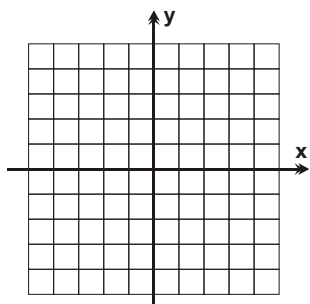
41) Resolver graficamente a inequação abaixo.

$$(x + 1)^2 + y^2 \leq 9$$



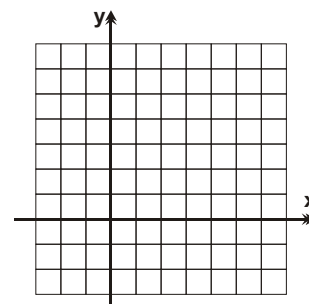
42) Resolver graficamente a inequação abaixo.

$$x^2 + y^2 \leq 16$$



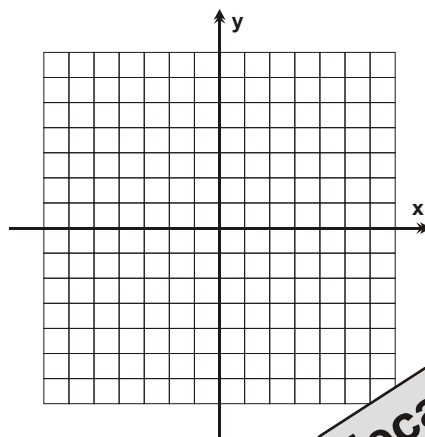
43) Resolver graficamente a inequação abaixo.

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 4$$



44) Resolver graficamente o sistema de a inequações abaixo

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 16 \\ x - 2y \geq 2 \\ y > -1 \end{cases}$$



Jeca

## XIX - Lugar Geométrico .

Lugar Geométrico Plano (LG) é o conjunto dos pontos do plano que satisfazem uma determinada propriedade.

O Lugar Geométrico é uma equação com 2 variáveis  $x$  e  $y$ , que representa todos os pontos do plano que satisfazem a propriedade desejada.

### Exercícios

Para a obtenção da equação com duas variáveis que representa o LG, impõe-se a propriedade desejada a um ponto  $P(x, y)$  genérico, que representa os infinitos pontos do plano que satisfazem a propriedade desejada.

45) (MAPOFEI-72) Num sistema cartesiano plano são dados os pontos  $O(0, 0)$  e  $A(3, 0)$ . Determinar o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  tais que  $\overline{OP} = 2 \cdot \overline{AP}$ .

46) Determinar o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  cuja distância ao eixo das abscissas é o dobro da distância ao eixo das ordenadas.

47) Obter a equação da mediatriz do segmento de extremos  $A(7, 2)$  e  $B(-1, 6)$ .

**Observação**

- Mediatriz de um segmento  $AB$  é o lugar geométrico dos pontos do plano, eqüidistantes de  $A$  e de  $B$ .

48) Determinar o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  alinhados com os pontos  $A(-3, 1)$  e  $B(0, 4)$ .

<p>49) Determinar o lugar geométrico dos pontos <math>P(x, y)</math> do plano, tais que a soma dos quadrados das distâncias aos pontos <math>A(0, 5)</math> e <math>B(0, -5)</math> é 100.</p>	<p>50) Determinar o lugar geométrico dos pontos <math>P(x, y)</math> do plano, tais que a diferença dos quadrados das distâncias aos pontos <math>A(0, 5)</math> e <math>B(0, -5)</math> é 20.</p>
<p>51) Determinar o lugar geométrico dos pontos <math>P(x, y)</math> do plano, eqüidistantes das retas (r) <math>2x - y - 8 = 0</math> e (s) <math>x - 2y - 1 = 0</math>.</p>	<p>52) Determinar o lugar geométrico dos pontos <math>P(x, y)</math> do plano, eqüidistantes das retas (r) <math>3x - 2y + 12 = 0</math> e (s) <math>3x - 2y - 2 = 0</math>.</p>
<p>53) Determinar o lugar geométrico dos pontos <math>P(x, y)</math> do plano, cuja distância ao ponto <math>C(4, -1)</math> seja igual a 7.</p>	<p>54) Determinar o lugar geométrico dos pontos <math>P(x, y)</math> do plano, cuja distância à reta (r) <math>x + 2y - 4 = 0</math> seja o dobro da distância à reta (s) <math>2x - y + 9 = 0</math>.</p>

Respostas desta lista de exercícios.  
4ª parte

- 01) ponto exterior à circunferência  
02) reta secante à circunferência  
03) A é exterior, B pertence à circunferência  
04) A é interior, B é exterior  
05)  $k < -3$  ou  $k > 3$   
06)  $3 - \sqrt{15} < k < 3 + \sqrt{15}$   
07) a reta é secante à circunferência  
08) a reta é exterior à circunferência  
09) secante  $P_1(3, -3)$  e  $P_2(2, 4)$   
10) tangente  $P_1(2, -3)$   
11) tangente  $P_1(-2, 0)$   
12) secante  $P_1(6, 0)$  e  $P_2(-1, 1)$   
13)  $x + 4y + k = 0$   $K \in \mathbb{R}$   
14)  $y = 2x/5 + k/5$   $K \in \mathbb{R}$   
15)  $y = -3x + k$   $K \in \mathbb{R}$   
16)  $y + k = 0$   $K \in \mathbb{R}$   
17)  $x + k = 0$   $K \in \mathbb{R}$   
18)  $y - 5 = m(x + 2)$   $m \in \mathbb{R}$  ou  $\nexists m$   
19)  $y - 0 = m(x - 0)$   $m \in \mathbb{R}$  ou  $\nexists m$   
20)  $y + 3 = m(x - 7)$   $m \in \mathbb{R}$  ou  $\nexists m$   
21)  $mx - y + 4m + 1 = 0$   $m \in \mathbb{R}$  ou  $\nexists m$   
22)  $mx - y - 7m - 3 = 0$   $m \in \mathbb{R}$  ou  $\nexists m$   
23)  $mx - y + 2m + 5 = 0$   $m \in \mathbb{R}$  ou  $\nexists m$   
24)  $mx - y - m + 3 = 0$   $m \in \mathbb{R}$  ou  $\nexists m$   
25)  $mx - y - m - 3 = 0$   $m \in \mathbb{R}$  ou  $\nexists m$   
26)  $3x + 4y - 51 = 0$  e  $4x - 3y - 43 = 0$   
27)  $x - 2y + 3 = 0$  e  $2x + y - 14 = 0$   
28)  $24x - 7y + 79 = 0$  e  $y - 1 = 0$   
29)  $3x + y + 2 + \sqrt{10} = 0$  e  $3x + y + 2 - \sqrt{10} = 0$   
30)  $3x - 2y + 4 + 6\sqrt{13} = 0$  e  $3x - 2y + 4 - 6\sqrt{13} = 0$

31)  $3x - 4y + 38 = 0$

As respostas dos exercícios 32 a 44 estão na próxima folha.

45)  $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$

46)  $2x - y = 0$

47)  $2x - y - 2 = 0$

48)  $3x - 3y + 12 = 0$

49)  $x^2 + y^2 = 25$

50)  $y = -1$

51)  $x + y - 7 = 0$  e  $x - y - 3 = 0$

52)  $3x - 2y + 5 = 0$

53)  $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 49$

54)  $3x - 4y + 22 = 0$  e  $5x + 14 = 0$

### Pedido do Jeca

Quando faço estas listas e as disponibilizo para os meus alunos, procuro não cometer erros. Entretanto erros acontecem. Por essa razão, peço a todos que façam-me um favor. Ao encontrarem um erro de enunciado, de desenho ou de resposta, por menor que seja, mandem um e-mail para mim, especificando que lista, que exercício e qual é o erro. Dessa forma, posso corrigi-lo e melhor servir a moçada.

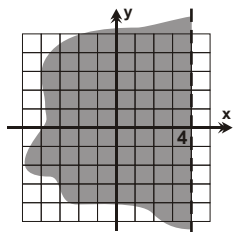
Obrigado.  
Um abraço.

Jeca

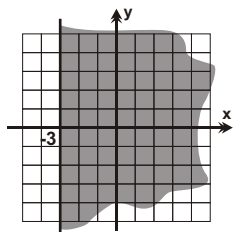
Meu e-mail [jecajeca@uol.com.br](mailto:jecajeca@uol.com.br)

**Jeca**

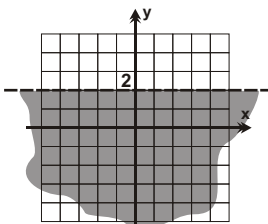
Respostas desta lista de exercícios.  
4ª parte (exercícios 32 a 44)



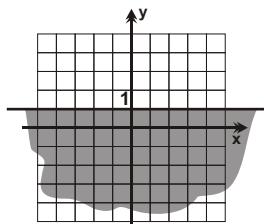
exercício 32



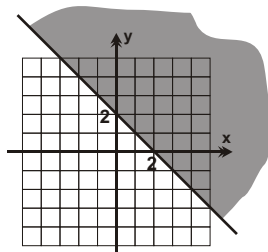
exercício 33



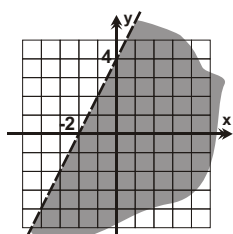
exercício 34



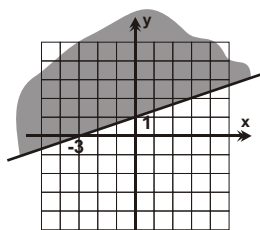
exercício 35



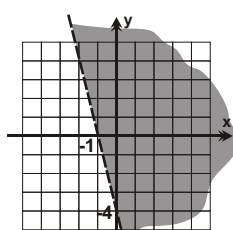
exercício 36



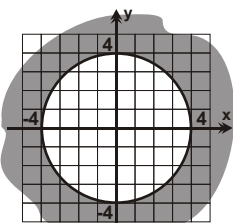
exercício 37



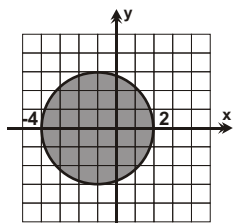
exercício 38



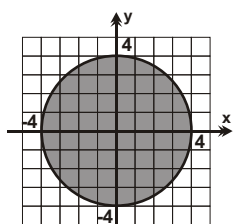
exercício 39



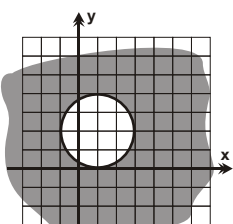
exercício 40



exercício 41



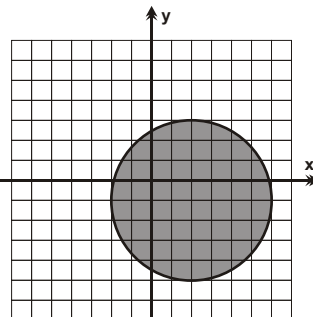
exercício 42



exercício 43

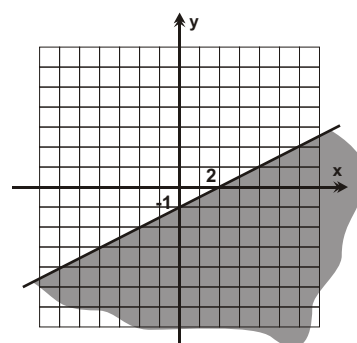
exercício 44

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 16$$



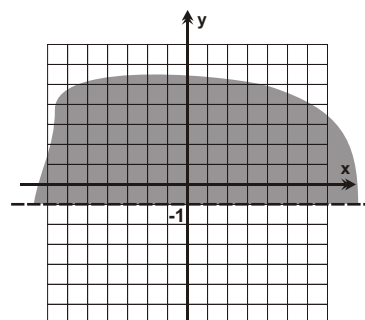
resposta parcial

$$x - 2y \geq 2$$

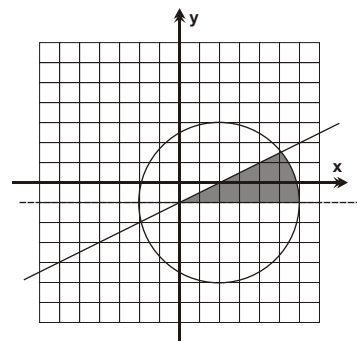


resposta parcial

$$y > -1$$



resposta parcial



resposta final



**Estudo das cônicas.**

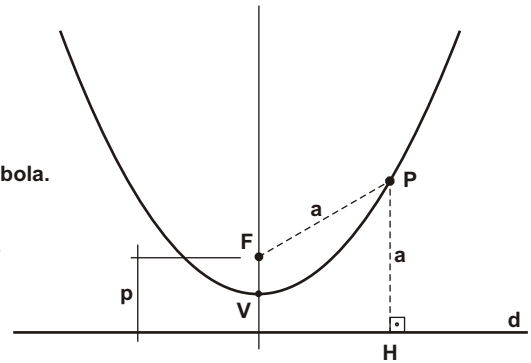
**I) Parábola.**

Dado um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz), denomina-se parábola o conjunto de pontos do plano equidistantes do ponto F e da reta d.

**Resumindo**  $FP = PH = a$

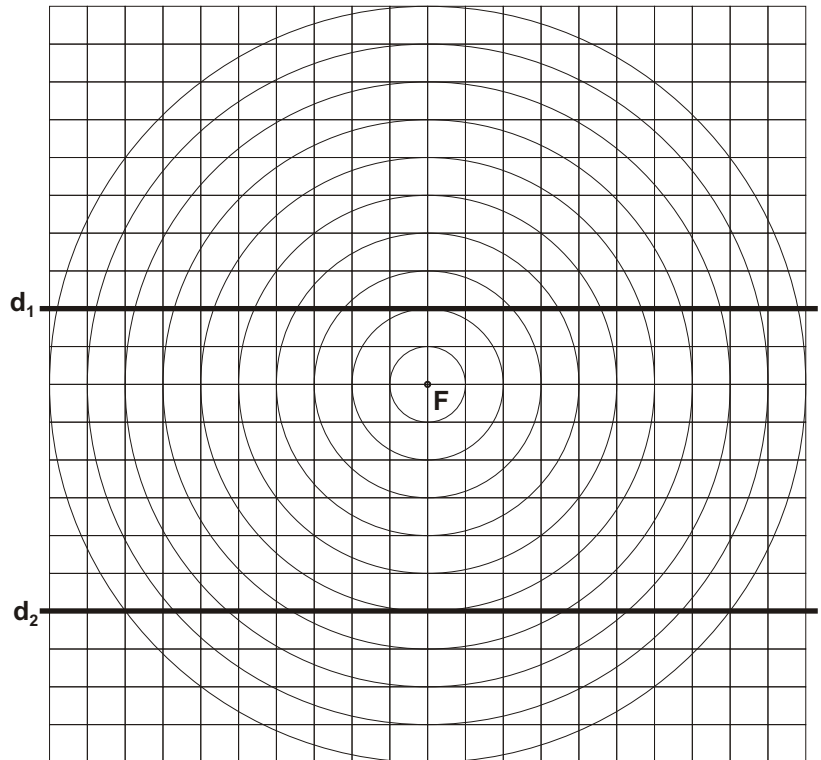
**Elementos da parábola.**

- F - foco da parábola.
- P - ponto qualquer da parábola.
- d - diretriz da parábola.
- V - vértice da parábola.
- Reta FV - eixo de simetria.
- p - parâmetro da parábola.



**EXERCÍCIO 01** - Na figura ao lado, obedecendo a definição de parábola, para um mesmo foco F, traçar duas parábolas; uma em relação à diretriz  $d_1$  e outra em relação à diretriz  $d_2$ .

**OBSERVAÇÃO** - Depois de traçadas as parábolas, note que quanto maior o parâmetro (distância entre o foco e a diretriz), mais aberta é a parábola.



**Pré-requisitos de Geometria Analítica para o estudo das parábolas.**

**Distância entre dois pontos.**

Dados os pontos  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$ , a distância entre A e B é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

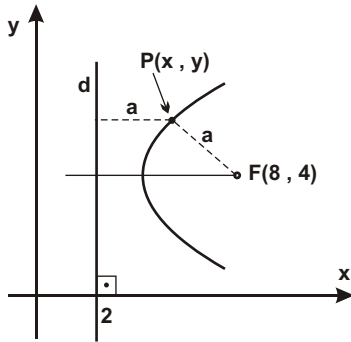
**Distância entre ponto e reta.**

Dada a equação geral de uma reta (r)  $ax + by + c = 0$  e um ponto  $P(x_0, y_0)$ , a distância entre a reta r e o ponto P é dada por:

$$d_{P(r)} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**EXERCÍCIO 02** - Determinar a equação da parábola que tem como foco o ponto  $F(7, 9)$  e como diretriz a reta  $x + 2y + 5 = 0$ .

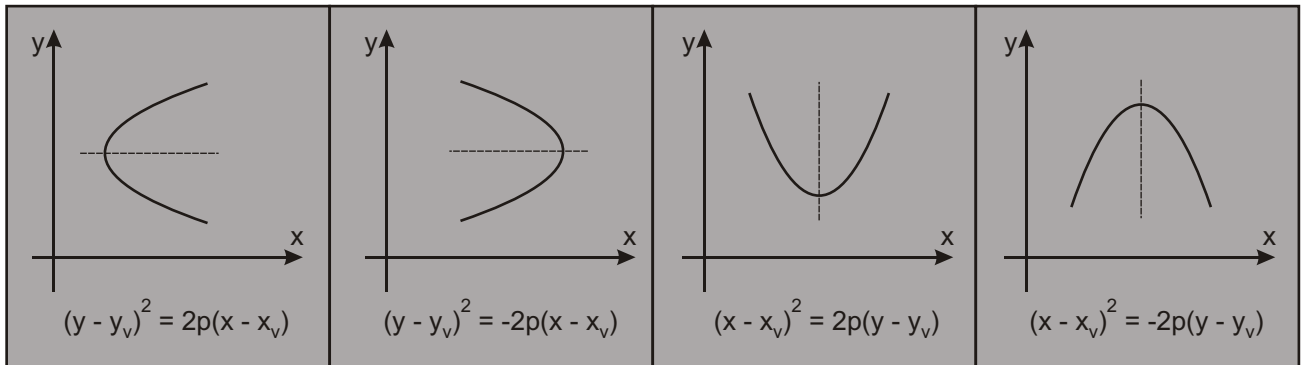
**EXERCÍCIO 03** - Usando a definição, determinar a equação da parábola abaixo, sendo **F** o foco e **d** a diretriz.



**Equações reduzidas das parábolas com eixo de simetria paralelo a um dos eixos coordenados.**

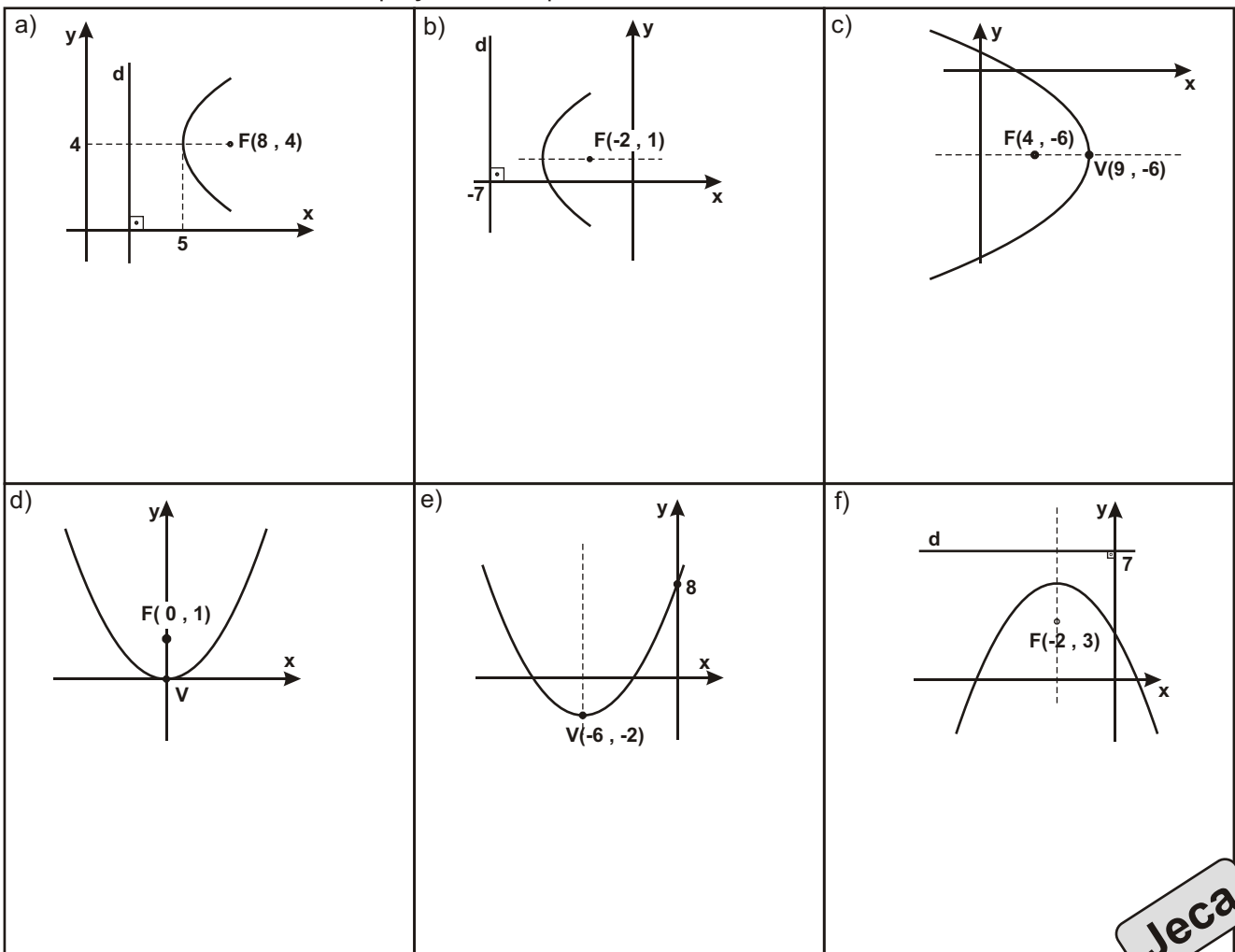
**Eixo de simetria paralelo ao eixo x.**

**Eixo de simetria paralelo ao eixo y.**

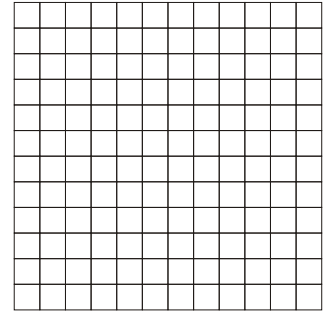


(  $V(x_v, y_v)$  são as coordenadas do vértice e  $p$  é o parâmetro (distância entre o foco e a diretriz) )

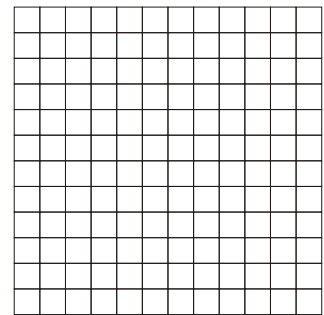
**EXERCÍCIO 04** - Determinar a equação de cada parábola abaixo.



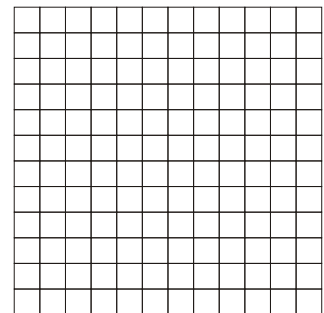
05) Determine as coordenadas do vértice e do foco, a equação da diretriz e o parâmetro da parábola de equação  $(y + 1)^2 = -14(x - 3)$ . Faça um esboço do gráfico dessa parábola.



06) Determine as coordenadas do vértice e do foco, a equação da diretriz e o parâmetro da parábola de equação  $(x + 4)^2 = 10(y - 2)$ . Faça um esboço do gráfico dessa parábola.

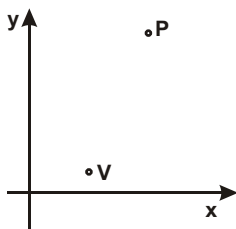


07) Determine o parâmetro, as coordenadas do vértice e a equação reduzida da parábola que tem foco  $F(-1, 3)$  e diretriz  $(d) y - 7 = 0$ . Faça um esboço do gráfico dessa parábola.

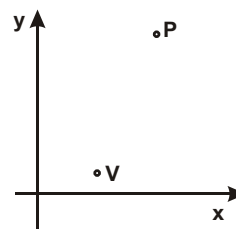


08) Determine as equações reduzidas das parábolas que têm vértice no ponto  $V(3, 1)$  e que passam pelo ponto  $P(6, 7)$ .

1º caso - eixo de simetria paralelo ao eixo y.



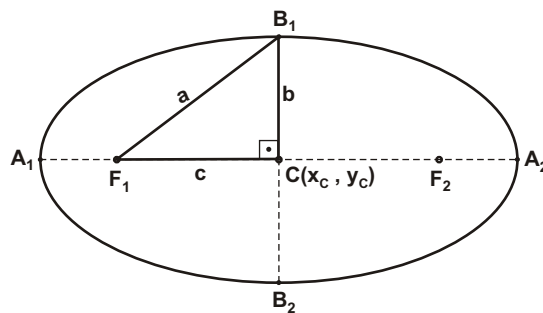
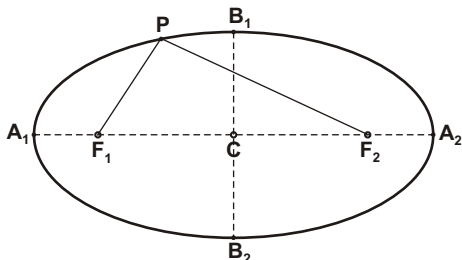
2º caso - eixo de simetria paralelo ao eixo x.



## II) Elipse.

Dados dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  (focos da elipse), denomina-se elipse o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a esses dois pontos é a constante  $2a$ , maior que a distância  $2c$  entre esses dois pontos.

Resumindo  $PF_1 + PF_2 = 2a$



Elementos da elipse.

$\overline{A_1A_2} = 2a$  - eixo maior.

$\overline{B_1B_2} = 2b$  - eixo menor.

$\overline{F_1F_2} = 2c$  - distância focal.

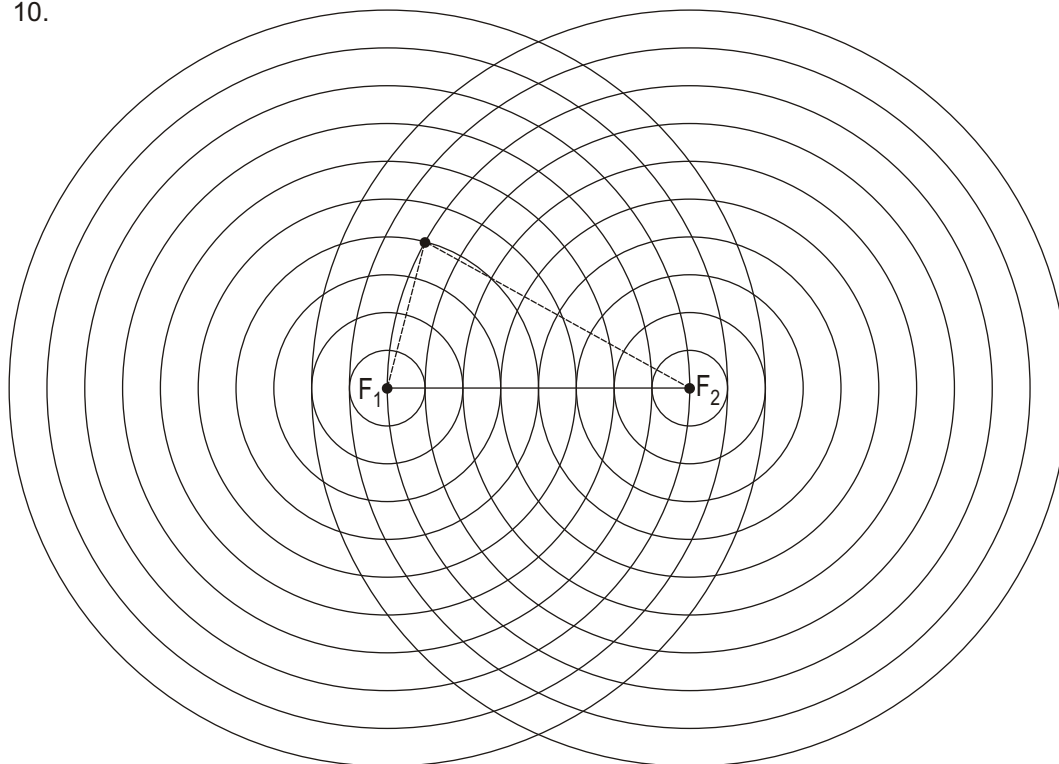
$C(x_c, y_c)$  - centro da elipse

Relação fundamental.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$e = \frac{c}{a}$  - excentricidade

01) Na figura abaixo, usando a definição, desenhe uma elipse impondo que a soma das distâncias de um ponto qualquer do plano aos pontos  $F_1$  e  $F_2$  seja igual a 12. (supor os círculos com raios iguais a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10).

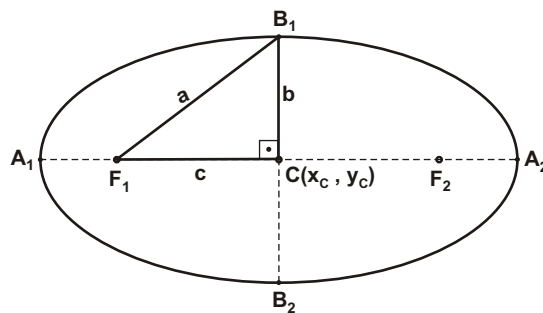
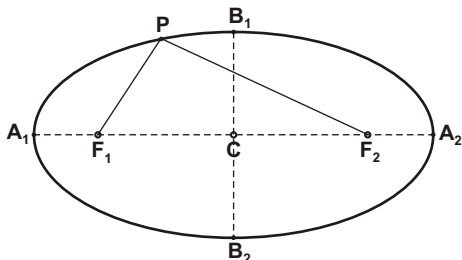


02) Determinar o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias aos pontos  $F_1(-2, -7)$  e  $F_2(4, 1)$  é 12.

## II) Elipse.

Dados dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  (focos da elipse), denomina-se elipse o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a esses dois pontos é a constante  $2a$ , maior que a distância  $2c$  entre esses dois pontos.

Resumindo  $PF_1 + PF_2 = 2a$



### Elementos da elipse.

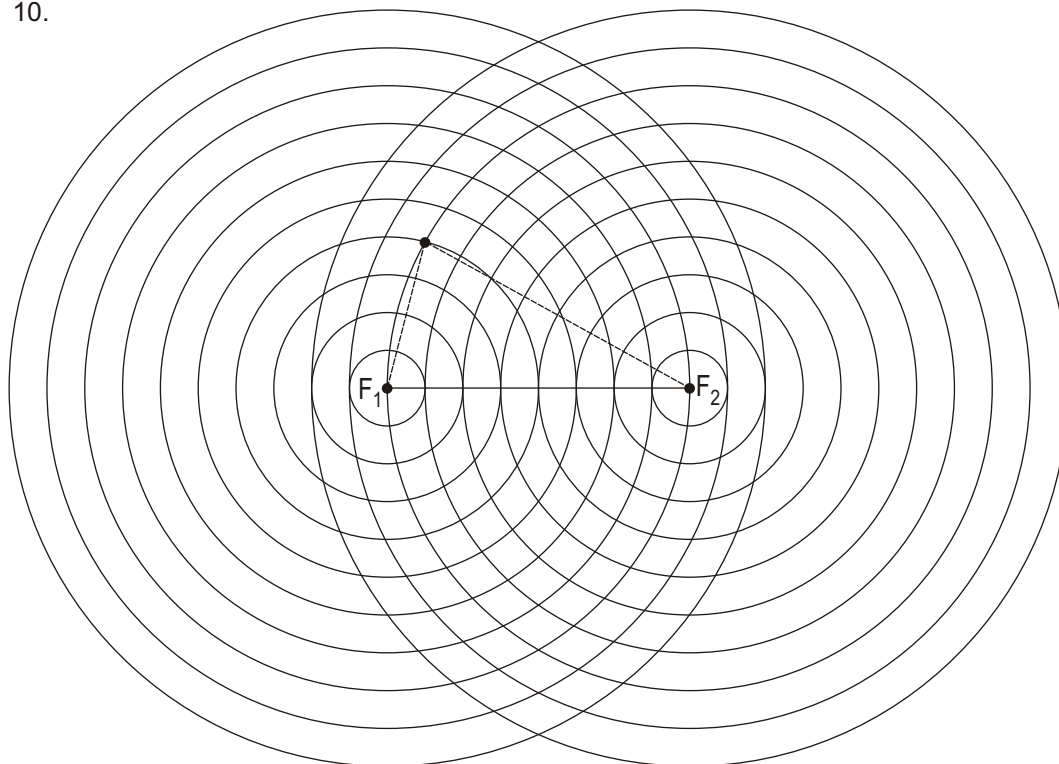
$\overline{A_1A_2} = 2a$  - eixo maior.  
 $\overline{B_1B_2} = 2b$  - eixo menor.  
 $\overline{F_1F_2} = 2c$  - distância focal.  
 $C(x_c, y_c)$  - centro da elipse

### Relação fundamental.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a} \text{ - excentricidade}$$

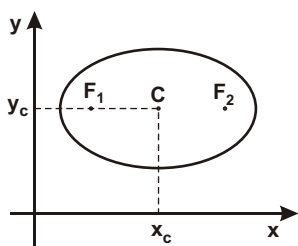
01) Na figura abaixo, usando a definição, desenhe uma elipse impondo que a soma das distâncias de um ponto qualquer do plano aos pontos  $F_1$  e  $F_2$  seja igual a 12. (supor os círculos com raios iguais a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10).



02) Determinar o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias aos pontos  $F_1(-2, -7)$  e  $F_2(4, 1)$  é 12.

**Equações reduzidas das elipses com eixos paralelos aos eixos coordenados.**

**Eixo maior paralelo ao eixo x.**

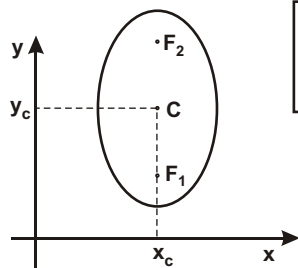


$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

$$F_1(x_c - c, y_c)$$

$$F_2(x_c + c, y_c)$$

**Eixo maior paralelo ao eixo y.**

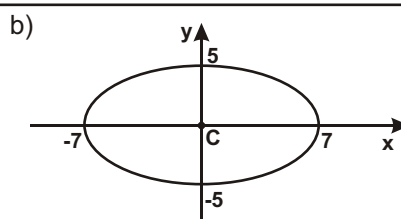
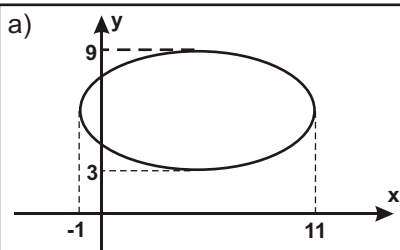


$$\frac{(x - x_c)^2}{b^2} + \frac{(y - y_c)^2}{a^2} = 1$$

$$F_1(x_c, y_c - c)$$

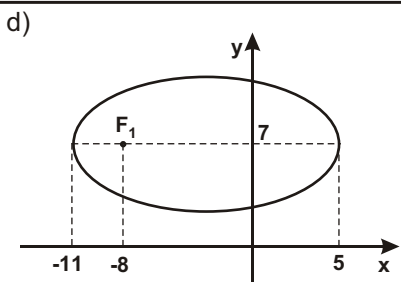
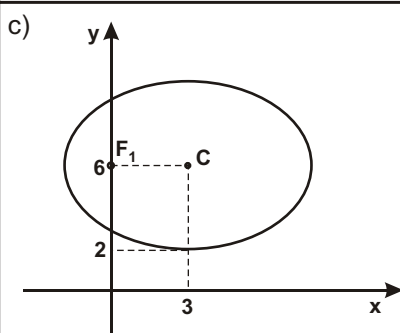
$$F_2(x_c, y_c + c)$$

03) Determinar a equação reduzida, os focos, o centro, o eixo maior, o eixo menor, a distância focal e também a excentricidade de cada elipse abaixo.



C(     ,     )	F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )	
2a =	2b =	2c =	e =

C(     ,     )	F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )	
2a =	2b =	2c =	e =

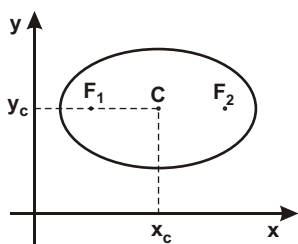


C(     ,     )	F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )	
2a =	2b =	2c =	e =

C(     ,     )	F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )	
2a =	2b =	2c =	e =

**Equações reduzidas das elipses com eixos paralelos aos eixos coordenados.**

**Eixo maior paralelo ao eixo x.**

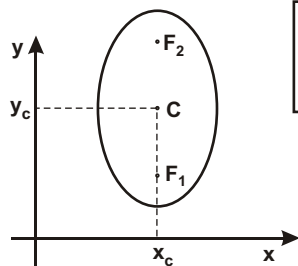


$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

$$F_1(x_c - c, y_c)$$

$$F_2(x_c + c, y_c)$$

**Eixo maior paralelo ao eixo y.**

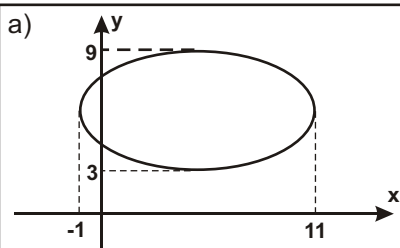


$$\frac{(x - x_c)^2}{b^2} + \frac{(y - y_c)^2}{a^2} = 1$$

$$F_1(x_c, y_c - c)$$

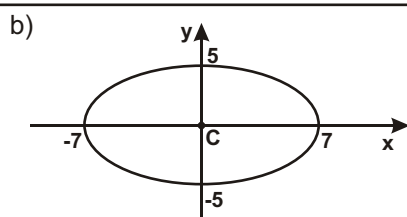
$$F_2(x_c, y_c + c)$$

03) Determinar a equação reduzida, os focos, o centro, o eixo maior, o eixo menor, a distância focal e também a excentricidade de cada elipse abaixo.



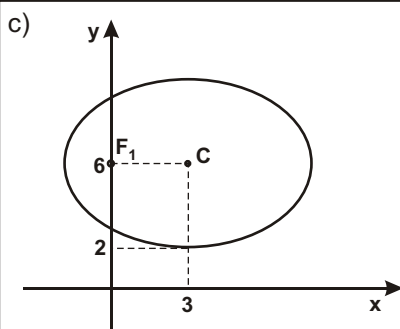
C(     ,     ) F<sub>1</sub>(     ,     ) F<sub>2</sub>(     ,     )

2a =     2b =     2c =     e =    



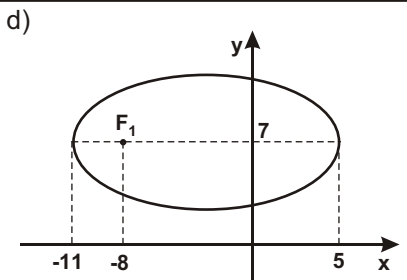
C(     ,     ) F<sub>1</sub>(     ,     ) F<sub>2</sub>(     ,     )

2a =     2b =     2c =     e =    



C(     ,     ) F<sub>1</sub>(     ,     ) F<sub>2</sub>(     ,     )

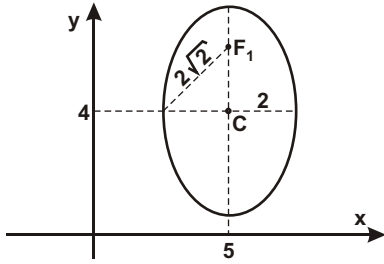
2a =     2b =     2c =     e =    



C(     ,     ) F<sub>1</sub>(     ,     ) F<sub>2</sub>(     ,     )

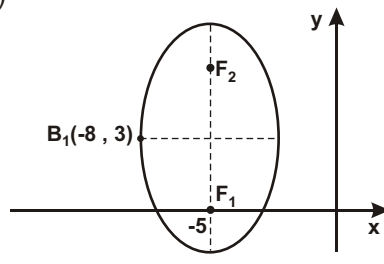
2a =     2b =     2c =     e =

e)



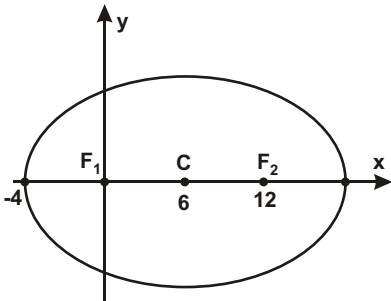
C(     ,     )	F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )	
2a =	2b =	2c =	e =

f)



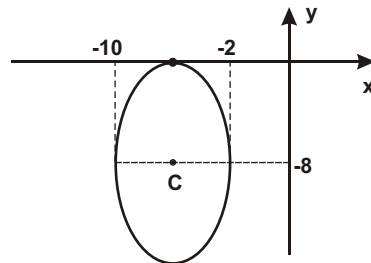
C(     ,     )	F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )	
2a =	2b =	2c =	e =

g)



C(     ,     )	F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )	
2a =	2b =	2c =	e =

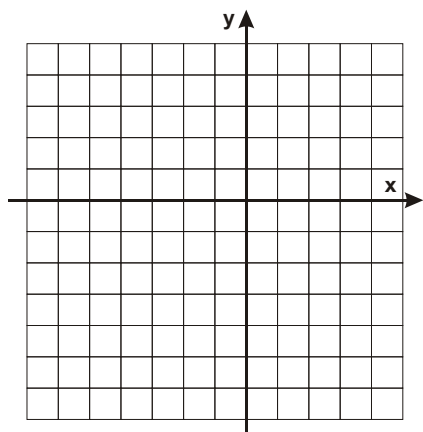
h)



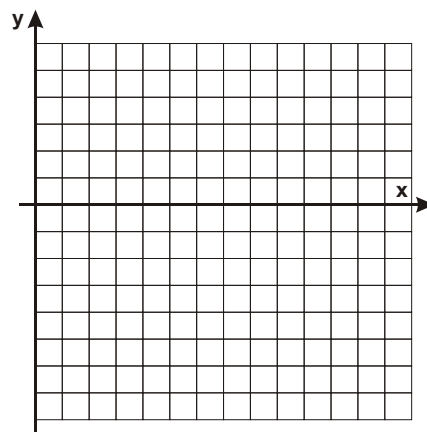
C(     ,     )	F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )	
2a =	2b =	2c =	e =



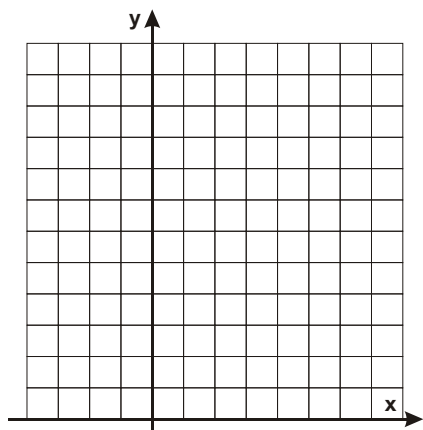
04) Determine a distância focal, o eixo maior, o eixo menor, as coordenadas do centro e a equação reduzida da elipse de excentricidade 0,5 e focos  $(-4, -1)$  e  $(2, -1)$ . Faça um esboço do gráfico da elipse.



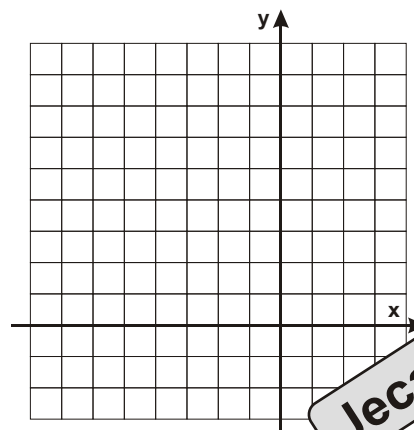
05) Determine a distância focal, o eixo maior, o eixo menor, as coordenadas do centro e a excentricidade da elipse de equação reduzida  $\frac{(x-8)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{36} = 1$ . Faça um esboço da elipse.



06) Determine o eixo maior, o eixo menor, as coordenadas do centro e dos focos e a excentricidade da elipse de equação  $9(x-2)^2 + 25(y-6)^2 = 225$ . Faça um esboço do gráfico da elipse.



07) Sendo  $A_1(-1, 9)$  e  $A_2(-1, -3)$  as extremidades do eixo maior e  $B_1(-4, 3)$  e  $B_2(2, 3)$  as extremidades do eixo menor de uma elipse, faça um esboço do gráfico da mesma e determine as coordenadas do centro, a distância focal, o eixo maior, o eixo menor, as coordenadas dos focos, a excentricidade e a equação reduzida dessa elipse.

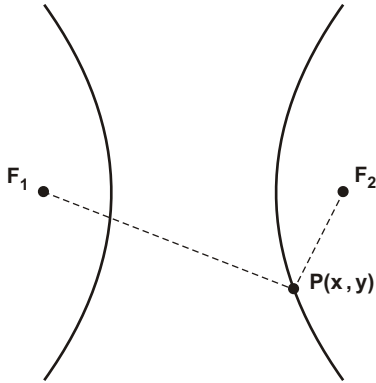


**Jeca**

### III) Hipérbole.

Dados dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  (focos da hipérbole), denomina-se hipérbole o conjunto dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a esses dois pontos é a constante  $2a$ , menor que a distância  $2c$  entre esses dois pontos.

Resumindo  $|PF_1 - PF_2| = 2a$



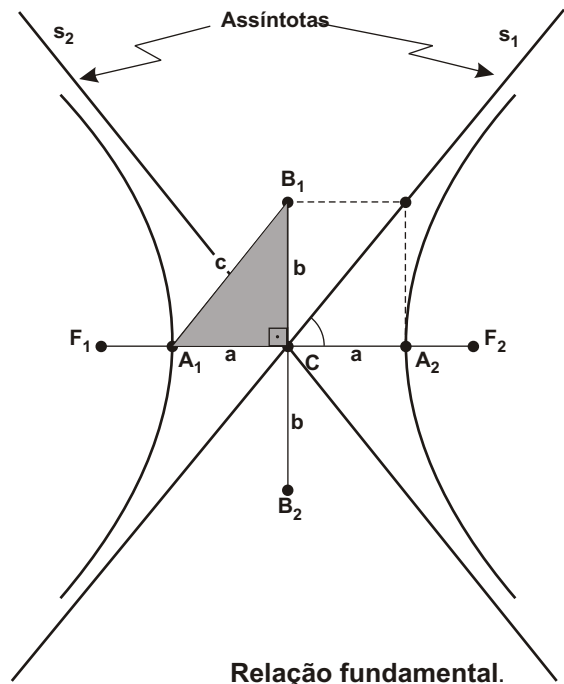
#### Elementos da hipérbole

- $A_1A_2 = 2a$  - eixo real.
- $B_1B_2 = 2b$  - eixo imaginário.
- $F_1$  e  $F_2$  - focos da hipérbole.
- $F_1F_2 = 2c$  - distância focal.
- $C(x_C, y_C)$  - centro da hipérbole.

#### Coefficiente angular das assíntotas.

$$m_{s_1} = \frac{b}{a}$$

$$m_{s_2} = -\frac{b}{a}$$



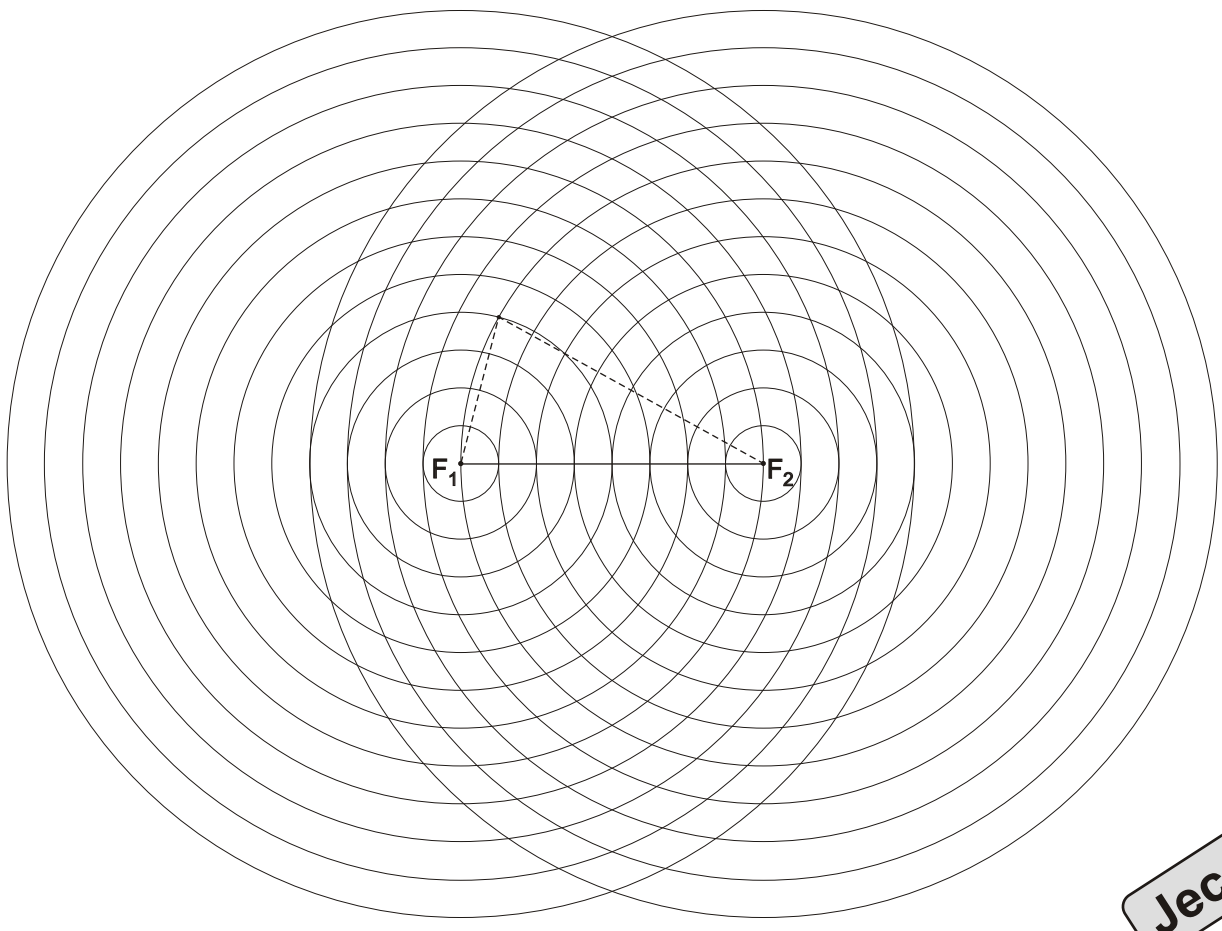
#### Relação fundamental.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

#### Excentricidade.

$$e = \frac{c}{a}$$

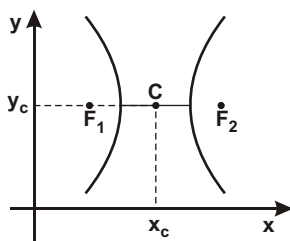
01) Na figura abaixo, usando a definição, desenhe uma hipérbole impondo que o módulo da diferença das distâncias de um ponto qualquer do plano aos pontos  $F_1$  e  $F_2$  seja igual a 4. (supor o reticulado formado por quadrados unitários)



02) Determinar a equação que representa o conjunto dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias aos pontos A(-1, 3) e B(4, 7) seja 3.

**Equações reduzidas das hipérbolas com eixo real paralelo aos eixos coordenados.**

**Eixo real paralelo ao eixo x.**

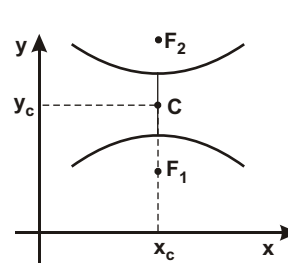


$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

$$F_1(x_c - c, y_c)$$

$$F_2(x_c + c, y_c)$$

**Eixo real paralelo ao eixo y.**

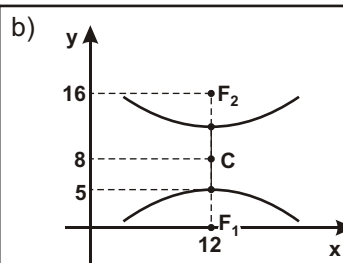
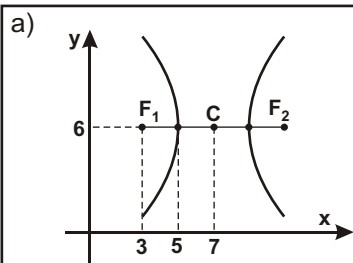


$$\frac{(y - y_c)^2}{a^2} - \frac{(x - x_c)^2}{b^2} = 1$$

$$F_1(x_c, y_c - c)$$

$$F_2(x_c, y_c + c)$$

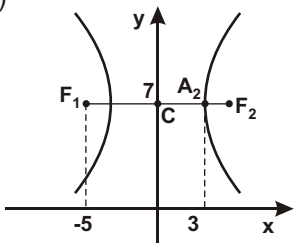
03) Determinar a equação reduzida, os focos, o centro, o eixo real, o eixo imaginário, a distância focal e também a excentricidade de cada hipérbole abaixo.



C(     ,     )	F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )	
2a =	2b =	2c =	e =

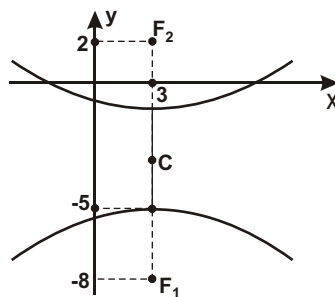
C(     ,     )	F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )	
2a =	2b =	2c =	e =

c)



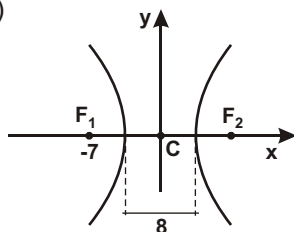
C(     ,     )		F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )
2a =	2b =	2c =	e =

d)



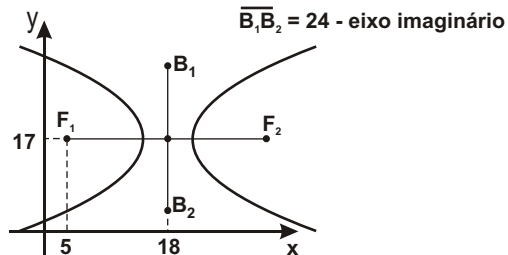
C(     ,     )		F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )
2a =	2b =	2c =	e =

e)



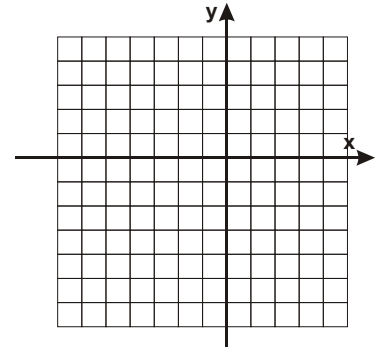
C(     ,     )		F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )
2a =	2b =	2c =	e =

f)



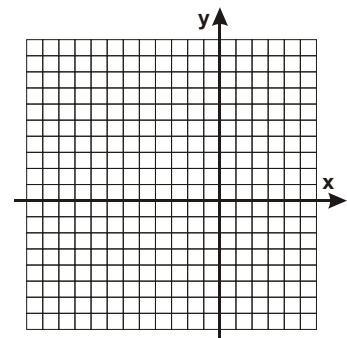
C(     ,     )		F <sub>1</sub> (     ,     )	F <sub>2</sub> (     ,     )
2a =	2b =	2c =	e =

04) Determine a distância focal, o eixo real, o eixo imaginário, as coordenadas do centro e a equação reduzida da hipérbole de excentricidade 2 e focos  $(-4, -1)$  e  $(2, -1)$ . Faça um esboço do gráfico da hipérbole.

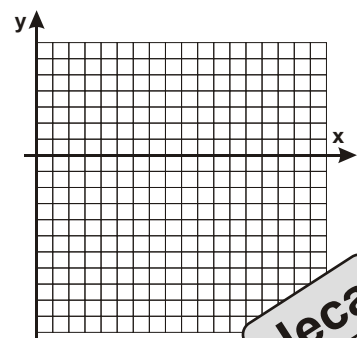


05) Determine a distância focal, o eixo real, o eixo imaginário, as coordenadas do centro e dos focos e a excentricidade da hipérbole de equação reduzida abaixo. Faça um esboço do gráfico da hipérbole.

$$\frac{(y + 3)^2}{25} - \frac{(x - 1)^2}{49} = 1$$



06) Sendo  $F(18, -2)$  um dos focos da hipérbole de eixo real  $A_1A_2$ , sendo  $A_1(7, -2)$  e  $A_2(16, -2)$ , determine a distância focal, o eixo real, o eixo imaginário, a excentricidade, as coordenadas do centro e do outro foco, a equação reduzida e as equações das assíntotas da hipérbole. Faça um esboço do gráfico da hipérbole.





04) $2c=6, 2a=3, 2b=3\sqrt{3},$ $C(-1, -1)$ $\frac{(x+1)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{(y+1)^2}{\frac{27}{4}} = 1$	05) $2c=2\sqrt{74}, 2a=10, 2b=14, C(1, -3), F_1(1, -3+\sqrt{74}),$ $F_2(1, -3-\sqrt{74}), e=\sqrt{74}/5$
06) $2c=13, 2a=9, 2b=2\sqrt{22}, e=13/9, C(23/2, -2), F_2(5, -2),$ $\frac{(x-23/2)^2}{\frac{81}{4}} - \frac{(y+2)^2}{22} = 1$	Equações das assíntotas $2\sqrt{22}x - 9y - 23\sqrt{22} - 18 = 0$ $2\sqrt{22}x + 9y - 23\sqrt{22} + 18 = 0$

### Pedido do Jeca

Quando faço estas listas e as disponibilizo para os meus alunos, procuro não cometer erros. Entretanto erros acontecem. Por essa razão, peço a todos que façam-me um favor. Ao encontrarem um erro de enunciado, de desenho ou de resposta, por menor que seja, mandem um e-mail para mim, especificando que lista, que exercício e qual é o erro. Dessa forma, posso corrigi-lo e melhor servir a moçada.

Obrigado.  
Um abraço.

Jeca

Meu e-mail [jecajeca@uol.com.br](mailto:jecajeca@uol.com.br)